



Adaptation de maillage non structuré 3D pour les problèmes instationnaires. Application à la mécanique des fluides

Frédéric Alauzet, Pascal Frey, Paul-Louis George, Bijan Mohammadi

► To cite this version:

Frédéric Alauzet, Pascal Frey, Paul-Louis George, Bijan Mohammadi. Adaptation de maillage non structuré 3D pour les problèmes instationnaires. Application à la mécanique des fluides. [Rapport de recherche] RR-4981, INRIA. 2003. inria-00071597

HAL Id: inria-00071597

<https://inria.hal.science/inria-00071597>

Submitted on 23 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

***Adaptation de maillage non structuré 3D
pour les problèmes instationnaires.
Application à la mécanique des fluides***

Frédéric Alauzet — Pascal J. Frey — Paul Louis George — Bijan Mohammadi

N° 4981

31 octobre 2003

THÈME 4

 ***apport
de recherche***



Adaptation de maillage non structuré 3D pour les problèmes instationnaires. Application à la mécanique des fluides

Frédéric Alauzet^{*}, Pascal J. Frey[†], Paul Louis George[‡], Bijan Mohammadi[§]

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Gamma

Rapport de recherche n° 4981 — 31 octobre 2003 — 55 pages

Résumé : Ce rapport aborde le thème de l'adaptation de maillage non structuré en trois dimensions pour les problèmes instationnaires et son application à la mécanique des fluides. On y montre en particulier que l'algorithme classique d'adaptation est inapproprié pour traiter ce type de problèmes. Par conséquent, on propose ici une autre approche basée sur un nouvel algorithme d'adaptation et sur une procédure d'intersection de métriques en temps, permettant de capturer de tels phénomènes. Plus précisément, une boucle spécifique est intégrée dans le schéma d'adaptation classique afin de résoudre un problème de point fixe transitoire pour le couple maillage-solution. L'estimateur d'erreur (géométrique) *a posteriori* anisotrope utilisé dans le schéma d'adaptation est basé sur une majoration de l'erreur d'interpolation. La métrique de calcul résultante est alors définie à l'aide du hessien de la solution. L'adaptation de maillage (surfique et volumique) est basée sur une procédure visant à créer un maillage unité par rapport à la métrique spécifiée. Un exemple 3D est proposé pour illustrer l'efficacité de cette méthode.

Mots-clés : Adaptation de maillage, problèmes instationnaires, métrique anisotrope, estimateur d'erreur *a posteriori*, équations d'Euler, maillage unité.

^{*} Email : Frederic.Alauzet@inria.fr

[†] Email : Pascal.Frey@inria.fr

[‡] Email : Paul-Louis.George@inria.fr

[§] Email : Bijan.Mohammadi@math.univ-montp2.fr

Unstructured Mesh Adaptation in 3D for Time Dependent Problems. Application to CFD

Abstract: This report deals with the adaptation of unstructured meshes in three dimensions for transient problems and its application to CFD problems. The classical mesh adaptation scheme appears inappropriate when dealing with such problems. Hence, another approach based on a new mesh adaptation algorithm and a metric intersection in time procedure, suitable to capture such phenomena, is proposed. More precisely, a new specific loop is inserted in the main adaptation loop in order to solve a transient fixed point problem for the couple mesh-solution. The anisotropic *a posteriori* (geometrical) error estimate used in the adaptation scheme is based on a majoration of the interpolation error. The resulting computational metric is then defined using the hessian of the solution. The mesh adaptation stage (surface and volume) is based on the generation of a unit mesh with respect to the prescribed metric. A 3D example is proposed to illustrate the efficiency of this method.

Key-words: Mesh adaptation, time dependent problems, anisotropic metrics, *a posteriori* error estimate, Euler equations, unit mesh.

Table des matières

1	Introduction	4
2	Adaptation de maillage	8
2.1	Schéma d'adaptation de maillage	8
2.2	Modélisation de l'écoulement	9
2.3	Calcul de la métrique	10
2.4	Adaptation de maillage	12
2.5	Interpolation de la solution	13
3	Problématique avec l'adaptation de maillage classique	15
3.1	Algorithme d'adaptation de maillage	15
3.2	Un problème type : propagation d'ondes non-linéaires	16
3.3	Calcul de l'erreur	16
3.4	Résultats numériques	18
3.5	Justification	28
3.6	Interprétation de l'étude	30
4	Adaptation de maillage basée sur un point fixe transitoire	31
4.1	Schéma d'adaptation instationnaire	31
4.2	Intersection de métriques en temps	32
4.3	Illustration sur un exemple simple	34
4.4	Application au problème modèle	38
5	Propagation d'ondes non-linéaires 3D	44
6	Conclusions et perspectives	53

1 Introduction

La réduction de la complexité des simulations numériques est toujours un enjeu (industriel) crucial malgré l'accroissement constant de la puissance du matériel informatique. Elle permet en effet un gain notable au niveau du temps de calcul des simulations en dimension trois et au niveau de l'analyse de leurs résultats. Une des méthodes développées pour réduire la complexité est l'adaptation de maillage, dont le but est de contrôler la précision de la solution numérique en modifiant la discrétisation du domaine de calcul suivant des contraintes de tailles et de directions. En effet, dans les simulations numériques basées sur des méthodes d'éléments ou de volumes finis, les maillages des domaines de calcul ont un rôle prépondérant. Maillages et calculs sont si étroitement liés, que de la qualité des premiers dépend en grande partie la précision numérique des seconds.

Dans le cadre des simulations dépendant du temps, l'adaptation de maillage est d'autant plus importante que la solution est non connue *a priori* et surtout que les phénomènes physiques se déplacent dans le domaine de calcul. Dans le cas où ils se déplacent dans tout le domaine, un maillage fin uniforme est nécessaire partout, cela afin de conserver la précision de la solution numérique tout au long de la simulation. Ce qui rend ces simulations inaccessibles dans des temps raisonnables en dimension trois. En outre, les phénomènes instationnaires (turbulences, phénomènes mobiles, ...) constituent la majorité des phénomènes physiques dans la réalité. Cependant, la majeure partie des simulations effectuées dans l'industrie sont stationnaires et les simulations instationnaires ne représentent qu'une très faible partie d'entre elles à cause de leurs temps de calcul prohibitifs.

Appliquer l'adaptation de maillage pour de telles simulations aurait pour effet de réduire considérablement leur complexité. Effectivement, l'utilisation de l'adaptation de maillage doit permettre de conserver la précision de la solution tout en évitant de remailler de manière fine une trop grande partie du domaine de calcul.

Dans cette étude, on s'intéresse à l'application de l'adaptation de maillage pour les phénomènes instationnaires. On va montrer que l'algorithme classique d'adaptation de maillage est intrinsèquement inadapté à l'étude de tels phénomènes. On propose alors une nouvelle approche générale pour traiter ce type de problèmes.

Formulation du problème

Dans les simulations instationnaires, on est confronté au problème de l'évolution des phénomènes physiques dans le domaine d'étude. On va montrer qu'en général le schéma classique d'adaptation est inadapté à l'étude de ce type de problèmes de part sa définition. En effet, il existe alors un décalage dans le temps entre la solution et le maillage, *i.e.*, le maillage est toujours "en retard" par rapport à la solution, ce qui a pour conséquence de diffuser la solution. Afin de réduire ce décalage, un approche possible est d'adapter fréquemment le maillage, on montre alors, dans le cadre du remaillage, qu'il existe une inconsistance (décalage) dans le temps de la

solution. En effet, l'utilisation de l'adaptation de maillage lors d'un calcul instationnaire introduit, relativement à chaque changement de maillage (de discrétisation et de connectivité), une source d'erreur importante due à l'interpolation de la solution de l'ancien maillage sur le nouveau.

Pour y remédier, il faut soit trouver un nouveau schéma d'interpolation qui corrige ce problème, soit il faut diminuer le nombre d'adaptations de maillage à effectuer afin de contrôler l'erreur due à l'interpolation. La deuxième solution à l'avantage d'être d'application générale et indépendante de la méthode de résolution utilisée, nous allons donc choisir cette approche.

Dans cette approche, la procédure d'adaptation de maillage doit réduire le nombre total d'adaptations nécessaires pour effectuer la simulation mais elle doit conserver la précision de la solution tout en évitant de mailler une trop grande partie du domaine de calcul. Pour cela, deux points clefs doivent être pris en compte : (i) prédire l'évolution des phénomènes physiques dans le domaine et (ii) enrichir (adapter) le maillage dans toutes les régions où ces phénomènes évoluent.

Cette approche doit être validée sur un problème (réel) représentatif des simulations instationnaires. On désire avoir une géométrie complexe et des phénomènes non prédictibles *a priori*, c'est-à-dire qu'il y ait, par exemple, un grand nombre d'interactions entre eux. Par conséquent, nous nous intéressons aux problèmes dont la solution n'est connue que *via* une solution numérique (ce qui est généralement le cas). Pour étudier une simulation aussi simple que possible, ce qui écarte les phénomènes turbulents et les problèmes où la frontière du domaine est mobile, nous proposons alors le problème suivant où la propagation d'ondes de chocs non-linéaires dans une géométrie fixe est simulée. Cette simulation est basée sur une généralisation du problème de Riemann.

Les problématiques liées à l'adaptation de maillage pour les simulations instationnaires ainsi que les solutions proposées seront étudiées et analysées en dimension deux sur ce problème. L'analyse y étant beaucoup plus accessible et bien plus pratique. Pour cela, on comparera les solutions adaptées à une solution dite de référence.

État de l'art

L'adaptation de maillage non structuré pour les simulations stationnaires a fait l'objet de nombreux travaux. Par contre relativement peu de travaux ont proposé des solutions pour traiter les problèmes instationnaires avec l'adaptation.

Pour l'adaptation de maillage à nombre de sommets fixes et sans changement de connectivités (*i.e.*, aucune bascule d'arêtes ou de faces-arêtes) une approche ALE (en anglais "Arbitrary Lagrange Euler") peut être utilisée. Elle permet de prendre en compte le mouvement du maillage en introduisant un terme dans l'équation du problème, elle dépend donc du problème étudié. Ce terme remplace l'étape d'interpolation à chaque changement de maillage. Mais cette méthode ne nous intéresse pas car dans notre approche (moins rigide que la méthode ALE) le nombre de sommets

ainsi que les connectivités varient, afin de générer un maillage “optimal” (unité) pour la simulation.

Pour l’adaptation de maillage où la taille du maillage varie ainsi que les connectivités deux approches ont été proposées. Pour éviter que la solution ne sorte des régions maillées, plusieurs auteurs ont suggéré [15, 18] de considérer une zone de sécurité de part et d’autre de la région critique et d’adapter très fréquemment le maillage (*i.e.*, toutes les 5 à 20 itérations de solveur) en utilisant des méthodes de raffinement/déraffinement (sans bougé de points) pour réduire les erreurs d’interpolation. L’inconvénient de cette approche est qu’elle ne corrige pas l’erreur due à l’étape d’interpolation dans le cadre du remaillage puisque un grand nombre d’adaptations sont effectuées. De plus, les méthodes de raffinement/déraffinement ne conduisent pas à des maillages “optimaux” en termes de nombre et de placement des nœuds et elles écartent la génération de maillages réellement anisotropes. De même, considérer une telle zone de sécurité implique que la taille du maillage n’est pas “optimale”.

Pour les méthodes de remaillage visant à générer des maillages optimaux (en termes de nombre et de placement de nœuds), un algorithme d’adaptation instationnaire a été proposé dans [19, 22]. Il consiste à estimer l’erreur toutes les n_1 itérations de solveur et à adapter le maillage si l’erreur est supérieure au seuil donné. Dans tous les cas, le maillage est adapté toutes les n_2 itérations du solveur. Mais, cet algorithme implique un grand nombre d’adaptations et ne corrige donc pas l’erreur due à l’interpolation.

Dans ce contexte, pour les méthodes de remaillage, une approche préliminaire a été proposée par Mohammadi *et al.* [3, 17] dans le but de contrôler le nombre d’adaptations. Dans cette approche, l’adaptation de maillage est basée sur la résolution d’un problème de point fixe transitoire. Nous avons suivi cette approche en l’améliorant de manière significative.

Notre approche

Pour les simulations dépendant du temps, nous présentons une nouvelle méthode automatique d’adaptation de maillage, qui étend les résultats préliminaires de [3, 17]. Cette approche est d’application générale, c’est-à-dire qu’elle peut s’appliquer à toutes les classes de problèmes instationnaires (indépendamment du type d’équations le modélisant).

Nous proposons une extension de l’algorithme d’adaptation de maillage qui permet de prédire l’évolution des phénomènes physiques. Le principe est de résoudre un problème de point fixe transitoire pour le couple formé par le maillage et la solution à chaque itération de la boucle d’adaptation. Il est composé de deux boucles, la boucle principale d’adaptation et une boucle interne dans laquelle le problème transitoire est résolu.

Connaissant l’évolution de la solution, il faut maintenant adapter le maillage dans les régions où les phénomènes évoluent afin de préserver la précision de la solution. En d’autres termes, nous voulons contrôler l’erreur tout au long du calcul c’est-à-

dire introduire le temps dans l'estimateur d'erreur. Pour cela, nous introduisons une procédure d'intersection de métriques en temps dans la construction de la métrique.

L'adaptation de maillage non structuré est ici basée sur le calcul des longueurs des arêtes dans une métrique discrète (définie aux sommets du maillage). Cette métrique (anisotrope) est construite en utilisant un estimateur d'erreur géométrique *a posteriori* basé sur une approximation discrète du hessien de la solution. Le but est d'équi-répartir l'erreur d'interpolation sur le maillage en contrôlant la construction des arêtes du maillage.

Plan de l'exposé

Dans ce rapport, nous présentons et nous analysons la méthode proposée ci-dessus. Section 2, nous présentons l'algorithme classique d'adaptation de maillages. Puis, on rappelle brièvement toutes les étapes de la procédure d'adaptation. Dans la Section 3, le schéma d'adaptation de maillage est analysé sur un problème modèle représentatif des simulations instationnaires en dimension deux. Nous y montrons les limites de l'adaptation classique, dans le cadre du remaillage, pour ce type de simulation. Section 4, nous présentons en détail la nouvelle approche d'adaptation pour les simulations instationnaires. Nous précisons le nouveau schéma d'adaptation et nous indiquons la procédure d'intersection de métriques en temps. Cette nouvelle approche est validée sur le même problème modèle. Puis Section 5, nous illustrons l'approche proposée sur un exemple concret d'application en dimension trois.

2 Adaptation de maillage

Le but de l'adaptation de maillage est de fournir un moyen de contrôler la précision de la solution numérique en modifiant la discrétisation du domaine suivant des contraintes de tailles et de directions. C'est-à-dire de contrôler la génération d'un nouveau maillage dans un schéma de calcul de telle sorte que l'erreur de calcul estimée sur ce maillage est équi-répartie dans toutes les directions. Il en découle que l'adaptation de maillage permet automatiquement de détecter et capturer le comportement et de prendre en compte l'anisotropie des phénomènes physiques même si l'écoulement n'est pas connu *a priori*.

Dans cette section, on présente d'abord l'algorithme d'adaptation de maillage. Ensuite, on rappelle brièvement toutes les étapes de la procédure d'adaptation. Une description plus précise des composantes de ce schéma a été donnée dans [1, 5, 10].

2.1 Schéma d'adaptation de maillage

Dans cette section, nous proposons un schéma d'adaptation de maillage anisotrope automatique d'application générale (*i.e.*, indépendante du domaine d'application), dont chacune des composantes est indépendante des autres.

L'idée principale du schéma classique d'adaptation de maillage consiste à rechercher un point fixe pour le couple formé par le maillage et la solution. Autrement dit, on cherche à converger à la fois vers la solution (stationnaire) du problème et (en un certain sens) vers le maillage adapté associé. Ce maillage est tel que l'erreur d'interpolation de la solution convergée du problème évaluée sur celui-ci est équirépartie. Il s'agit donc d'un algorithme itératif dans lequel chaque itération débute avec comme couple initial le maillage et la solution issus de l'itération précédente.

Dans notre approche, l'adaptation de maillage repose sur le calcul des longueurs d'arêtes dans une métrique discrète dans le but d'équirépartir l'erreur sur le maillage. Plus précisément, après le calcul de la solution numérique, il faut transcrire celle-ci en une information pertinente pour le générateur de maillage, en termes de tailles et de directions des éléments. Pour cela, on estime dans un premier temps l'erreur sur les éléments du maillage. Dans notre cas, nous utilisons l'estimateur d'erreur *a posteriori* anisotrope géométrique, basé sur l'erreur d'interpolation. À partir de cette estimation de l'erreur, une carte de tailles (un champ de métriques) anisotrope destinée à gouverner la génération de maillage adapté est construite, dans le but d'équirépartir l'erreur calculée sur le maillage. Ensuite, un maillage *unité* (adapté) est généré dans cette métrique. Enfin, la solution est interpolée linéairement sur le nouveau maillage. Ce processus est itéré jusqu'à convergence de la solution (et du maillage). Ce schéma est illustré sur la Figure 1, où on a noté respectivement \mathcal{T} , \mathcal{S} , \mathcal{S}^0 et \mathcal{M} le maillage, la solution, la solution initiale à chaque itération et la métrique.

Dans la suite, on rappelle brièvement toutes les étapes de l'algorithme d'adaptation de maillage.

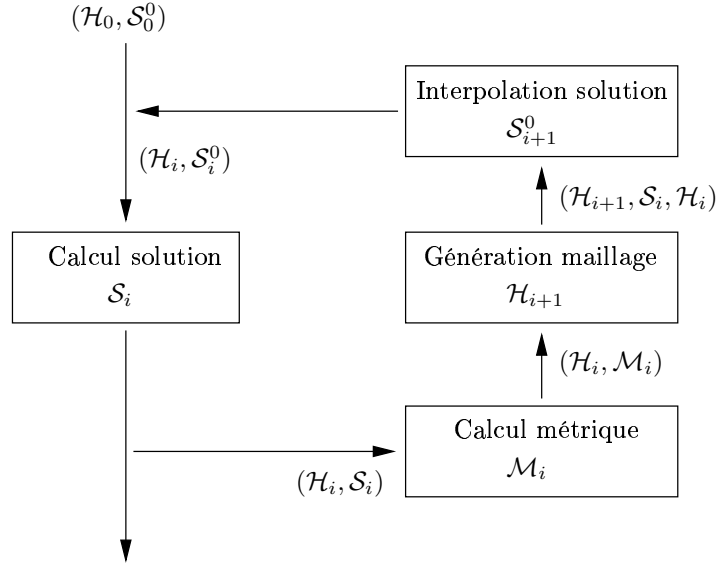


FIG. 1 – Schéma classique d'adaptation de maillage.

2.2 Modélisation de l'écoulement

Dans ce rapport, nous allons appliquer les techniques d'adaptation de maillage à la mécanique des fluides, en se limitant dans les simulations aux écoulements modélisés par les équations d'Euler. Toutefois, les simulations sont effectuées sur des géométries complexes (réalistes).

Dans le cadre des équations d'Euler, le gaz est supposé parfait, il est non visqueux et il n'y a pas de diffusion thermique. On note ρ la densité, $\vec{U} = (u_1, u_2, u_3)$ le vecteur vitesse, T la température, $E = T + \frac{\|\vec{U}\|^2}{2}$ l'énergie totale, $p = (\gamma - 1)\rho T$ la pression avec $\gamma = 1.4$ et ∇ l'opérateur gradient. Les équations d'Euler s'écrivent sous forme conservative de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0, \\ \frac{\partial (\rho \vec{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U} \otimes \vec{U}) + \nabla p = 0, \\ \frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho E + p) \vec{U}) = 0, \end{cases}$$

où on a successivement les équations de conservation de la masse, du moment et de l'énergie exprimées sous forme tensorielle.

Les équations d'Euler sont résolues à l'aide du solveur **NSCKE** [16] (développé à l'INRIA-Rocquencourt). C'est un solveur Volumes Finis pour le calcul d'écoulement en dimension deux et trois utilisant des maillages non-structurés. Les équations d'Euler sont résolues à l'aide du flux de Roe. On utilise une reconstruction de type MUSCL et des limiteurs de Van Albada pour obtenir une précision d'ordre deux

(limité) en espace. L'algorithme utilisé est explicite en temps. Pour le traitement des problèmes instationnaires, un schéma de type Runge-Kutta à quatre pas est utilisé pour l'intégration en temps, afin d'avoir une précision d'ordre supérieur.

2.3 Calcul de la métrique

Dans cette section, nous rappelons brièvement, l'étape de construction de la métrique. Une description plus précise de cette construction est donnée dans [1]. Ensuite, nous précisons la normalisation de l'estimateur d'erreur et l'intersection de métriques dans le cadre de la mécanique des fluides.

Estimateur d'erreur géométrique *a posteriori*. On a fait l'hypothèse qu'un contrôle de l'erreur d'interpolation permet de contrôler l'erreur d'approximation¹. Notre estimateur d'erreur *a posteriori* anisotrope va donc être basé sur l'erreur d'interpolation. Le but est de générer un maillage adapté sur lequel l'erreur d'interpolation est équi-répartie dans toutes les directions.

Pour tout élément K du maillage du domaine, on a la majoration anisotrope de l'erreur d'interpolation, basée sur les dérivées de second ordre de la variable u :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty, K} \leq c \max_{x \in K} \max_{e \in E_K} \langle \vec{e}, |H_u(x)| \vec{e} \rangle = \varepsilon_K, \quad (1)$$

où c est une constante qui dépend de la dimension, E_K l'ensemble des arêtes de l'élément K et $|H_u| = \mathcal{R}|\Lambda|\mathcal{R}^{-1}$ est la valeur absolue du hessien de la variable u , où \mathcal{R} est la matrice des vecteurs propres et $|\Lambda| = \text{diag}(|\lambda_i|)$ la matrice (diagonale) des valeurs absolues des valeurs propres.

Remarque 2.1 *L'idée de cet estimateur d'erreur est de regarder la solution comme une (hyper)surface et de contrôler l'écart à cette surface. Cette estimateur est donc indépendant du problème traité et il est relié au hessien de la solution.*

Construction de la métrique. On utilise alors une approximation discrète de la métrique qui utilise comme support les sommets du maillage. On note h_{min} (resp. h_{max}) la longueur minimale (resp. maximale) autorisée pour les arêtes du maillage et ε l'erreur d'interpolation tolérée. Alors en chaque sommet du maillage, d'après la Relation (1) on définit un tenseur de métrique anisotrope de la manière suivante :

$$\mathcal{M} = \mathcal{R} \tilde{\Lambda} \mathcal{R}^{-1}, \text{ où } \tilde{\Lambda} = \text{diag}(\tilde{\lambda}_i) \text{ et } \tilde{\lambda}_i = \min \left(\max \left(\frac{c|\lambda_i|}{\varepsilon}, \frac{1}{h_{max}^2} \right), \frac{1}{h_{min}^2} \right).$$

Nous avons introduit dans la définition de la métrique des longueurs d'arêtes minimale et maximale afin d'éviter les métriques irréalistes et notamment pour contrôler le pas de temps du solveur explicite.

1. Les résultats numériques obtenus tendent à confirmer cette hypothèse en pratique pour nos problèmes.

Donc pour équirépartir l'erreur d'interpolation sur le maillage, on est conduit à modifier le produit scalaire qui sous-tend la notion de distance utilisée par les générateurs de maillages, à l'aide de la métrique locale \mathcal{M} qui remplace la métrique euclidienne usuelle. On cherche alors à construire un maillage avec des éléments réguliers unités dans la nouvelle métrique.

Dans la suite, nous proposons une normalisation de l'estimateur d'erreur dans le cadre de la mécanique des fluides qui permet de mieux capturer certains phénomènes physiques. Ensuite, nous présentons une méthode qui permet de prendre en compte différentes variables physiques dans la définition de la métrique.

Estimateur d'erreur pour la mécanique des fluides. En pratique dans les simulations numériques, on est confronté au fait que les solutions varient de plusieurs ordres de grandeur (phénomènes multi-échelles). Si on est en présence de plusieurs phénomènes de différentes grandeurs (recirculations, chocs, ...), il est difficile de capturer les plus faibles avec l'adaptation de maillage. C'est d'autant plus difficile en mécanique des fluides lorsque des chocs sont présents dans l'écoulement. La capture de ces phénomènes faibles est importante pour obtenir une solution plus précise en prenant en compte leurs interactions avec les autres phénomènes de l'écoulement.

Il a été montré qu'une estimation de l'erreur relative locale permet de résoudre ce problème [6, 14], c'est-à-dire on normalise la Relation (1) par la valeur absolue de la valeur locale de la variable u :

$$\left\| \frac{u - \Pi_h u}{|u|_\epsilon} \right\|_{\infty, K} \leq c \max_{x \in K} \max_{\vec{e} \in E_K} \langle \vec{e}, \frac{|H_u(x)|}{|u(x)|_\epsilon} \vec{e} \rangle, \quad (2)$$

où $|u|_\epsilon = \max(|u|, \epsilon \|u\|_{\infty, \Omega})$ avec ϵ une constante petite devant 1. Le terme $\epsilon \|u\|_{\infty, \Omega}$ est un paramètre de troncature pour éviter les problèmes numériques. Il définit aussi l'intervalle entre la plus petite et la plus grande échelle que l'on veut capturer c'est-à-dire que lorsqu'un phénomène physique a une grandeur inférieure à ce terme, il n'est pas capturé.

Intersection de métriques. Nous venons de voir précédemment la construction de la métrique par rapport à une variable scalaire. Mais, il peut être nécessaire de considérer plusieurs variables pour la construction de la métrique (pour lesquelles on désire contrôler l'erreur d'interpolation) afin de capturer différents phénomènes physiques. En effet, certains phénomènes ne sont représentés que par certaines variables.

Si plusieurs variables sont considérées alors plusieurs métriques sont prescrites en chaque sommet. Pour obtenir une métrique unique qui les prend toutes en compte, une procédure d'intersection de métriques va être utilisée. Soient \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 deux tenseurs de métrique donnés au sommet P . Le tenseur de métrique \mathcal{M} correspondant à l'intersection de \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 doit être tel (par définition) qu'on garantit que l'erreur d'interpolation pour chaque variable est bornée par le seuil prescrit. On obtient la métrique \mathcal{M} en faisant la réduction simultanée des formes quadratiques associées aux métriques \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 (cf. [1]).

Cependant, ces variables peuvent avoir des significations ou des natures physiques différentes, alors se pose le problème de la dimension des variables. Mais, d'après la Relation (2), on a une estimation de l'erreur relative et donc l'intersection de métriques est consistante. Plus formellement, si on considère n variables $\{u_i\}_{i=1,n}$ alors la métrique est donnée par :

$$\mathcal{M} = \bigcap_{i=1,n} \mathcal{M}(u_i),$$

où $\mathcal{M}(u_i)$ est la métrique relative à la $i^{\text{ème}}$ variable.

2.4 Adaptation de maillage

Dans notre approche, la procédure de génération de maillage adapté est basée sur la spécification d'une métrique anisotrope discrète en chaque nœud du maillage courant. Pour cela, on est conduit à modifier le produit scalaire euclidien par le biais du champ de métrique \mathcal{M} . Le but est alors de construire un maillage pour lequel toutes les arêtes sont de longueur (proche) de un vis-à-vis de la métrique prescrite : $l_{\mathcal{M}}(\vec{e}_i) \approx 1$ pour toute arête \vec{e}_i et tel que les éléments soient réguliers. Un tel maillage adapté est appelé maillage *unité*. Soient P un sommet du maillage et $\mathcal{M}(P)$ la métrique en ce sommet. La longueur d'une arête PX dans la métrique $\mathcal{M}(P)$ est définie par :

$$l_{\mathcal{M}(P)}(PX) = \langle \vec{PX}, \vec{PX} \rangle_{\mathcal{M}(P)}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{{}^t \vec{PX} \mathcal{M}(P) \vec{PX}}.$$

Dans le cas où on a une métrique distincte en chaque sommet, *i.e.*, dépendant de la position, on doit prendre en compte la métrique associée à chaque point de l'arête, ainsi que les métriques de tous les points intermédiaires. Pour cela, on définit la longueur de PX sur toutes les métriques de la manière suivante :

$$l_{\mathcal{M}}(\vec{PX}) = \int_0^1 \sqrt{{}^t \vec{PX} \mathcal{M}(P + t\vec{PX}) \vec{PX}} dt.$$

Partant des notions introduites précédemment, le maillage adapté désiré est un maillage *unité* dans la métrique \mathcal{M} munie de la distance donnée par la relation précédente.

Dans notre approche, la génération de maillage en dimension trois s'effectue en deux temps. D'abord le maillage de surface est adapté en utilisant des modifications locales [8, 9], puis le maillage volumique adapté est construit en utilisant un algorithme de Delaunay contraint [11, 13]. Il est à noter que dans les deux procédures de génération de maillage adapté présentées ci-dessous, la majeure partie des entités de l'ancien maillage sont préservées, afin de réduire les erreurs d'interpolation lors du transfert des solutions d'un maillage à l'autre.

Maillage surfacique. Nous avons utilisé le mailleur de surface **Yams**, c'est un logiciel automatique de remaillage adaptatif de surfaces. Il a été aussi utilisé pour générer les maillages adaptés en dimension deux. Ce logiciel a été développé au sein du projet Gamma à l'INRIA-Rocquencourt [7].

La procédure de maillage est gouvernée par les propriétés géométriques de la surface (on définit une carte de taille de géométrie liant la taille des éléments aux courbures locales) et peut l'être aussi par une carte de métrique provenant d'un calcul (*via* un estimateur d'erreur), tout en contrôlant la qualité des éléments.

L'algorithme de remaillage se divise en trois étapes. Premièrement, la surface est analysée et la carte de taille géométrique provenant des propriétés intrinsèques de la surface est construite. Puis, la triangulation est modifiée en accord avec la prescription de taille par remaillage local. Pour cela, des opérations topologiques (bascules d'arêtes) et des opérations géométriques (insertion de points par subdivision d'une arête, suppression de points par suppression d'une arête en fusionnant ses deux extrémités et bougé de points) sont effectuées pour obtenir un maillage pour lequel la taille et la qualité des éléments sont contrôlées. Finalement, des optimisations locales sont faites pour améliorer la qualité en forme des éléments et le respect de la carte de taille.

Maillage volumique. Nous avons utilisé le mailleur volumique **Gamhic3d**, c'est un logiciel automatique de génération de maillage tétraédrique adaptatif. Ce logiciel a été développé au sein du projet Gamma à l'INRIA-Rocquencourt [12].

La procédure de génération de maillage tétraédrique est gouvernée à la fois par le maillage de surface (composé de triangles) qui décrit le domaine et par une carte de métrique (provenant d'un calcul) qui donne l'information sur la taille des éléments qui doivent être construits.

L'algorithme de génération de maillage est basé sur une méthode de type Delaunay, il est divisé en trois étapes. Tout d'abord, les points donnés par la frontière sont insérés par le biais d'une méthode de Delaunay contrainte et la frontière est recouverte en utilisant, entre autres, une répétition de bascules de faces-arêtes (opérations locales). Ensuite, la création des points internes est effectuée avant leur insertion *via* le noyau de Delaunay jusqu'à saturation des arêtes. Elle s'effectue en accord avec la prescription de taille donnée par la métrique, tout en contrôlant la forme des éléments. Enfin, des optimisations locales sont accomplies pour améliorer la qualité en formes des éléments et le respect de la carte de métrique, à l'aide d'opérations géométriques (bougé de points) ou topologiques (bascule de faces-arêtes).

2.5 Interpolation de la solution

L'interpolation de la solution est un point clef dans l'algorithme d'adaptation de maillage, il fait le lien entre la génération de maillage et le solveur numérique. Après avoir obtenu un nouveau maillage adapté (appelé maillage courant), l'objectif est de retrouver le champ de solution sur ce nouveau maillage pour continuer le calcul. Comme le champ de solution n'est connu que de manière discrète, il faut recourir

à un schéma d'interpolation pour extraire cette information. L'étape d'interpolation fait appel à l'espace de contrôle, contenant le maillage de fond ou ancien maillage (la description spatiale) et la solution qui lui est associée (le champ considéré relatif à cette description), pour recouvrer l'information pour le maillage courant.

Dans l'étape d'interpolation, deux problèmes sont à prendre en compte. D'abord la localisation des nouveaux sommets dans l'espace de contrôle, en identifiant les éléments du maillage de fond les contenant. Une approche possible est présentée dans [10]. Elle consiste à se déplacer dans le maillage (orienté) en utilisant la topologie de celui-ci, *i.e.*, les éléments voisins de chaque élément. On se déplace dans le maillage de fond par voisinage afin de trouver l'élément contenant le sommet en utilisant un algorithme basé sur les coordonnées barycentriques.

Une fois la localisation résolue, un schéma d'interpolation est utilisé pour extraire l'information du champ de solution. Nous utilisons le schéma d'interpolation classique de type P^1 car le champ de solution qui est interpolé n'est connu qu'aux sommets des simplexes du maillage (c'est-à-dire on a des éléments finis de Lagrange P^1). Soit P un point du maillage courant et $K = [P_1, P_2, P_3, P_4]$ le tétraèdre du maillage de fond le contenant. On définit K_i le tétraèdre virtuel où on a remplacé le sommet P_i par le sommet P pour $i = 1, 4$ et on note V_K le volume de l'élément K . Alors, le schéma d'interpolation est donné par :

$$u(P) = \sum_{i=1}^4 \omega_i(P) u(P_i), \quad \text{avec} \quad \omega_i(P) = \frac{V_{K_i}}{V_K}.$$

3 Problématique avec l'adaptation de maillage classique

Dans cette section, nous étudions la problématique liée à l'utilisation de l'algorithme classique d'adaptation de maillage pour les simulations instationnaires sur un exemple en dimension deux. Nous exposons d'abord les problèmes liés à la définition du schéma d'adaptation de maillage. Ensuite est présenté le problème modèle sur lequel nous allons analyser les résultats, puis il est précisé la méthode utilisée pour évaluer l'erreur commise entre la solution adaptée et la solution de référence. Nous appliquons cet algorithme au problème modèle et nous analysons l'impact du nombre d'adaptations de maillage sur la solution adaptée. Enfin, nous justifions théoriquement l'erreur due aux adaptations de maillage.

3.1 Algorithme d'adaptation de maillage

Il semble évident qu'en général l'algorithme d'adaptation de maillage est intrinsèquement inapproprié à l'étude de tels phénomènes à cause de leur évolution imprédictible dans le domaine de calcul. En effet, pour les simulations stationnaires l'algorithme consiste à rechercher un point fixe pour le couple formé par le maillage et la solution, Section 2.1. Par définition, cet algorithme implique que le maillage est toujours "en retard" par rapport aux phénomènes qui évoluent dans le domaine. Plus précisément, si cet algorithme est appliqué à un problème dépendant du temps, alors à chaque itération, le maillage utilisé pour le calcul est adapté seulement à la solution initiale donnée au solveur numérique. Lors du calcul qui suit, le maillage ne prend évidemment pas en compte l'évolution de la solution. Autrement dit, cet algorithme introduit des perturbations lors de son utilisation pour la résolution du problème à cause du décalage entre la solution et la métrique. Pour caractériser cela, nous donnons la définition suivante :

Définition 3.1 *On appelle intervalle de temps caractéristique τ d'un maillage le temps physique maximal au cours duquel on garantit que l'erreur de calcul est toujours bornée (équirépartie) par le seuil fixé. Ce qui se traduit par l'intervalle de temps maximal pendant lequel le maillage est toujours unité. Il faut noter que τ n'est pas connu, mais il s'exprime par $\tau = f(\varepsilon, h_{grad}, h_{min}, \vec{U}(t))$, une fonction de ε , h_{grad} , h_{min} et $\vec{U}(t)$ qui est la vitesse du phénomène physique au temps t .*

Première constatation, si cet algorithme est appliqué en effectuant un nombre d'adaptations de maillages insuffisant alors, à chaque itération de la boucle d'adaptation, la solution avance en temps de Δt qui est plus grand que l'intervalle de temps caractéristique τ du maillage. Donc, les phénomènes physiques (par exemple des chocs), qui se déplacent dans le domaine de calcul, sortent des régions adaptées (maillées finement), entraînant de fait, une perte de la précision de la solution. Ceci se traduit par une diffusion de la solution (des phénomènes physiques).

Pour éviter ce problème, on adapte le maillage fréquemment (*i.e.*, toutes les 5 à 20 itérations de solveur numérique). Le nombre d'adaptations devient alors suffisant pour que le temps Δt entre deux adaptations soit de l'ordre de τ . Le problème de

cette approche est que le coût de maillage devient prohibitif si on a des géométries complexes en trois dimensions. Mais, il reste encore à analyser l'impact sur la solution dans le cas où un grand nombre d'interpolations est effectué.

3.2 Un problème type : propagation d'ondes non-linéaires

Nous étudions comme problème (réel) représentatif des simulations instationnaires, l'évolution de phénomènes mobiles non prédictibles *a priori* dans une géométrie complexe (fixe). Plus précisément, le problème considéré est la propagation d'ondes de chocs non-linéaires dans une géométrie complexe représentant une place dans une ville. Cette simulation peut être vue comme une généralisation du tube à choc de Sod [20] (problème de Riemann) en dimension supérieure. Elle est modélisée par les équations d'Euler, Section 2.2. Une perturbation initiale de Heavyside est introduite dans un champ uniforme de manière à simuler une explosion, ce qui signifie qu'une région de haute pression (et densité) est introduite dans l'air ambiant (cf. Figure 2).

Plus précisément, pour définir l'état initial, on a les paramètres pour l'air ambiant dans le domaine de calcul, dont la taille (boîte englobante) est $150 \times 90 \text{ m}^2$, suivants : $\rho = 0.125$, $p = 0.1$ et $u = v = 0$, où ρ , p et $\vec{U} = (u, v)$ représentent respectivement la densité, la pression et le vecteur vitesse. Dans la région initiale de haute densité, délimitée par $[65, 67.5] \times [0, 2.5]$, on a les conditions initiales : $\rho = 1$, $p = 1$ et $u = v = 0$.

La Figure 5 montre l'évolution de la solution en dimension deux. On peut voir en plus de la propagation des ondes de chocs dans le domaine de calcul, un grand nombre d'interactions entre celles-ci. Cette simulation est représentative des problèmes instationnaires et illustre bien le comportement non prédictible *a priori* des phénomènes physiques.

3.3 Calcul de l'erreur

Pour analyser et valider les résultats d'une méthode, deux approches sont possibles. Dans la première approche, la solution est supposée connue, par exemple, elle est donnée par une formule analytique ou par un calcul dont on connaît la solution analytique (problème de Riemann, EDP où le terme source est choisi,...). Il est alors facile de vérifier si le résultat attendu est obtenu. Dans la deuxième approche, la solution provient d'un calcul dont il n'existe pas de solution analytique connue. Si on suppose que la modélisation et la résolution numérique sont valides, alors on peut comparer la solution obtenue à une solution dite de *référence*. En d'autres termes, on cherche à être consistant avec le solveur numérique lorsqu'on utilise l'adaptation de maillage, c'est-à-dire on cherche à retrouver le résultat obtenu sans l'adaptation.

Par la suite, nous allons analyser sur le problème modèle en dimension deux, les résultats obtenus à l'aide de l'adaptation de maillage par rapport à une solution de référence. Pour cela, il faut préciser l'évaluation de l'erreur commise lors d'un

calcul, c'est-à-dire l'évaluation de l'écart entre deux solutions et la construction de la solution de référence.

L'écart entre deux solutions u et v est donné par la formule suivante :

$$f_{err}(u, v) = \frac{\|u - v\|_{\Omega}}{\|u\|_{\Omega}}, \quad (3)$$

où $\|\cdot\|_{\Omega}$ est une norme adéquate (L^2 ou H^1) sur le domaine Ω . L'erreur ainsi obtenue est une erreur relative.

On définit la solution de référence de la manière suivante :

Définition 3.2 *On dit d'un maillage non structuré uniforme de taille h (i.e., dont toutes les arêtes sont de taille constante égale à h) qu'il est de référence si lorsque l'on prend le maillage non structuré uniforme de taille $h/2$, on a :*

$$f_{err}(u_{h/2}, u_h) \leq \varepsilon,$$

où $u_{h/2}$ (resp. u_h) désigne la solution obtenue sur le maillage de taille $h/2$ (resp. h) et ε une constante petite devant 1. C'est-à-dire que la solution est indépendante du maillage. La solution numérique obtenue sur un tel maillage est dite de référence.

Remarque 3.1 *Une autre définition possible est de considérer qu'un maillage est de référence lorsque la convergence asymptotique est atteinte. Plus précisément, si on note $e_h = \|u - u_h\|$ l'écart entre la solution du problème et la solution calculée sur le maillage de taille h , alors la convergence asymptotique est atteinte si $e_{2h}/e_h = e_h/e_{h/2} = c$ où c est une constante. Dans notre approche, nous avons choisi la première définition pour des raisons pratiques.*

Dans notre cas, le maillage de référence utilisé est de taille $h = 15 \text{ cm}$, ce qui conduit à un maillage de 1 345 824 sommets². Dans le Tableau 1, on trouve l'évaluation de l'erreur (écart de densité) entre la solution de référence et les solutions provenant des maillages uniformes non structurés de taille $h_1 = 4/3 h_{ref}$ et $h_2 = 2 h_{ref}$. Cependant, l'écoulement dans la région, qui initialement était de haute densité, est fortement non-linéaire. L'écoulement dans cette région est donc très dépendant de la discrétisation, ceci est dû au terme de viscosité numérique introduit dans les équations qui devient prépondérant. La solution obtenue peut fortement varier, à moins d'avoir une discrétisation identique. La solution de référence ne donne donc pas nécessairement la bonne solution, l'erreur dans cette région est en majeure partie due à la résolution numérique (solveur) et à la modélisation. Par conséquent, pour avoir une erreur plus représentative (et un maillage de référence), qui permet de vérifier si l'évolution des phénomènes physiques est correctement prédite et s'ils sont capturés de manière précise, nous calculons l'erreur sur $\Omega^* = \Omega \setminus \mathcal{D}$ où \mathcal{D} est la région délimitée par $[5, 9] \times [0, 2.5]$. En effet, on remarque que cette région fortement non-linéaire est

2. À titre d'exemple, un maillage uniforme du domaine de calcul de l'exemple tridimensionnel présenté dans la Section 5 serait de l'ordre de $1.8 \cdot 10^7$ sommets en prenant pour la taille des arêtes $h = 30 \text{ cm}$ sachant que la taille du domaine (boîte englobante) est $85m \times 85m \times 70m$. Ce qui montre bien que l'analyse des résultats n'est pas accessible en dimension trois.

la principale source d'erreur de la solution³, par exemple, pour le maillage de taille h_1 environ 90% de l'erreur en norme L^2 sont commis dans la région \mathcal{D} ! De toute manière, la densité des maillages obtenus avec l'adaptation de maillage est quasiment maximale dans cette région.

Nous considérons qu'une solution u est "proche" de la solution de référence u_{ref} si elle vérifie :

$$\frac{\|u_{ref} - u\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_{ref}\|_{L^2(\Omega)}} \leq 0.008 \quad \text{et} \quad \frac{\|u_{ref} - u\|_{H^1(\Omega)}}{\|u_{ref}\|_{H^1(\Omega)}} \leq 0.34,$$

et si elle vérifie :

$$\frac{\|u_{ref} - u\|_{L^2(\Omega \setminus \mathcal{D})}}{\|u_{ref}\|_{L^2(\Omega \setminus \mathcal{D})}} \leq 0.002 \quad \text{et} \quad \frac{\|u_{ref} - u\|_{H^1(\Omega \setminus \mathcal{D})}}{\|u_{ref}\|_{H^1(\Omega \setminus \mathcal{D})}} \leq 0.1,$$

où les constantes (qui apparaissent dans ces relations) sont définies à partir des résultats obtenus sur les deux maillages uniformes qui sont donnés dans le Tableau 1.

Maillage	Sommets	Éléments	$\ \cdot\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \cdot\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \cdot\ _{L^2(\Omega^*)}$	$\ \cdot\ _{H^1(\Omega^*)}$
$2 h_{ref}$	332 763	662 848	0.0083	0.345	0.0024	0.119
$4/3 h_{ref}$	749 696	1 495 310	0.0088	0.356	0.0010	0.062

TAB. 1 – *Statistiques des maillages uniformes de taille $h_1 = 4/3 h_{ref}$ et $h_2 = 2 h_{ref}$. Erreurs des solutions finales (densité) sur Ω et $\Omega^* = \Omega \setminus \mathcal{D}$ pour ces deux maillages.*

3.4 Résultats numériques

Nous allons appliquer le schéma classique d'adaptation de maillage au problème modèle en dimension deux, présenté dans la Section 3.2. Le but est d'atteindre la solution au temps physique $t_{max} = 0.2$ seconde. Nous allons effectuer plusieurs séries de calculs en modifiant le nombre d'itérations d'adaptation effectuées pour analyser l'impact de celles-ci. Nous comparerons les solutions (adaptées) obtenues à la solution de référence.

Dans chaque calcul, la densité est choisie comme variable pour la définition de la métrique, c'est-à-dire qu'on désire équi-répartir l'erreur d'interpolation du champ de densité. Les paramètres d'adaptation de maillage considérés sont les mêmes pour chaque calcul afin d'avoir la même complexité :

$$\varepsilon = 0.001, \quad h_{min} = 0.15 \, m, \quad h_{max} = 20 \, m \quad \text{et} \quad h_{grad} = 4,$$

où ε est le seuil d'erreur prescrit, h_{min} (resp. h_{max}) la taille minimale (resp. maximale) autorisée et h_{grad} la gradation (*i.e.*, le rapport de taille maximal entre deux

3. Ceci explique pourquoi les erreurs sur Ω provenant des deux maillages uniformes sont équivalentes. En effet, le maillage de taille $2 h_{ref}$ est similaire au maillage de référence (car on a seulement coupé les arêtes en deux). Alors que celui, de taille $4/3 h_{ref}$, ne correspond pas au maillage de référence.

éléments voisins). Le maillage initial est un maillage adapté aux conditions initiales, comportant 1 553 sommets et 2 917 triangles, Figure 2.

Pour chaque simulation, nous allons préciser dans le Tableau 2 :

- le nombre d’adaptations de maillage effectuées : n_{adap} ,
- la taille du maillage final : np le nombre de points et ne le nombre d’éléments (triangles),
- le temps de calcul global de la simulation t_{cpu} effectuée sur une station de travail HP9000 à 500 Mhz avec 500 Mo de mémoire,
- l’erreur en norme L^2 et H^1 par rapport à la solution (la densité) de référence.

Nous abordons le problème de deux façons différentes. Dans la première approche, nous choisissons de faire peu d’adaptations de maillage, par contre nous adaptons fréquemment le maillage dans la seconde.

Approche 1. On effectue 20 adaptations de maillage ce qui représente une adaptation toutes les $\Delta t = 0.01$ seconde. La taille du maillage final (adapté) obtenu est plus petite que celle du maillage de référence de deux ordres de grandeur. Il en est de même pour le temps de calcul. Par contre, dans ce cas la solution obtenue n’est pas

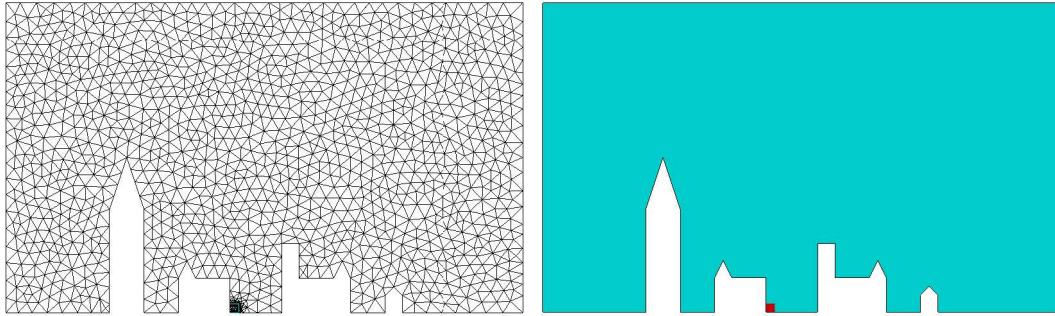


FIG. 2 – À gauche, maillage de calcul initial du domaine, et à droite, la solution initiale (les conditions initiales) du calcul.

n_{adap}	np	ne	t_{cpu}	$\ \cdot\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \cdot\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \cdot\ _{L^2(\Omega^*)}$	$\ \cdot\ _{H^1(\Omega^*)}$
20	14 399	28 291	10mn	0.0138	0.415	0.0064	0.171
40	19 052	37 592	18mn	0.0114	0.395	0.0043	0.156
60	22 384	44 285	25mn	0.0122	0.437	0.0044	0.142
100	26 476	52 441	35mn	0.0139	0.459	0.0086	0.210
200	29 203	57 905	59mn	0.0189	0.428	0.0152	0.228
\mathcal{H}_{ref}	1 345 824	2 686 286	37h30	-	-	-	-

TAB. 2 – Statistiques des maillages finaux adaptés pour les approches avec 20, 40, 60, 100 et 200 adaptations de maillage et les erreurs relatives des solutions finales (densité) sur Ω et $\Omega^* = \Omega \setminus \mathcal{D}$.

satisfaisante, en effet l'erreur L^2 (resp. H^1) sur $\Omega \setminus \mathcal{D}$ est 3 (resp. 1.7) fois supérieure au seuil donné précédemment (cf. Tableau 2).

Ceci est dû au nombre insuffisant d'adaptations effectuées, qui traduit le fait que le temps Δt , entre deux adaptations, est plus grand que l'intervalle de temps caractéristique du maillage τ . La Figure 3 montre l'évolution de la solution de référence et la solution en faisant 20 adaptations de maillage. La solution adaptée est diffusée à cause du retard du maillage par rapport à la solution. Cette diffusion se traduit par une perte d'intensité des chocs même si ils sont bien situés dans le domaine de calcul, on commet donc une erreur de norme. On le voit plus précisément sur la Figure 7 (en haut), où on a la densité de la solution le long des droites d'équation $y = 4$ et $y = 3.07692x - 17.4615$ traversant le domaine. On note aussi que le maillage se dégrade de plus en plus au fil des adaptations car la solution est de plus en plus diffuse (les phénomènes sont de moindre intensité), ce qui accélère d'autant la perte de précision, Figure 4. La Figure 8 (en haut) montre le maillage final et la solution finale (calculée sur ce maillage) au temps $t_{max} = 0.2$ seconde, on voit effectivement que les chocs sont sortis des régions denses du maillage adapté.

Approche 2. Pour éviter le problème du retard du maillage par rapport à la solution, nous proposons d'adapter le maillage fréquemment. On effectue 200 adaptations de maillage, ce qui correspond à une adaptation toutes les 0.001 seconde, c'est-à-dire toutes les (approximativement) 13 itérations de solveur numérique. La taille du maillage final (adapté) obtenu est environ 50 fois plus petite que celle du maillage de référence et le temps de calcul a été divisé par approximativement 40. On remarque que même si la taille du maillage final n'est que 2 fois plus grande que celui obtenu lors de l'approche précédente, le temps de calcul a été multiplié par 6. Ce qui confirme que faire un grand nombre d'adaptations pénalise le temps de calcul global de la simulation, ce qui peut devenir prohibitif sur une géométrie complexe en trois dimensions. Comme dans la première approche, la solution obtenue n'est pas satisfaisante (cf. Tableau 2). En effet, l'erreur L^2 (resp. H^1) sur $\Omega \setminus \mathcal{D}$ est plus de 7 (resp. 2.3) fois supérieure au seuil donné précédemment.

Pourtant, dans ce cas le nombre d'adaptations effectuées est suffisant. En effet, la Figure 8 (en bas) montre le maillage final et la solution finale (calculée sur ce maillage) au temps $t_{max} = 0.2$ seconde, on voit clairement que les chocs restent dans les régions denses du maillage adapté. Autrement dit, le temps Δt est plus petit que l'intervalle de temps caractéristique du maillage τ . Ce qui garantit que leur intensité est préservée, puisque la solution n'est plus dans un certain sens "en retard" par rapport au maillage. Sur la Figure 5, qui illustre l'évolution de la solution de référence et la solution en faisant 200 adaptations de maillage, on constate que l'intensité des phénomènes (chocs) a été préservée. D'ailleurs, les maillages ne se dégradent pas au fil des adaptations (cf. Figure 6).

Par contre, on constate l'apparition d'un décalage dans le temps de la solution, plus précisément, les chocs de la solution adaptée sont en avance dans le domaine par rapport à ceux de la solution de référence (cf. Figure 5). Ce décalage est mis en évidence sur la Figure 7 (en bas), où on a la densité de la solution le long des droites

d'équation $y = 4$ et $y = 3.07692x - 17.4615$ traversant le domaine. On commet donc une erreur de phase mais pas une erreur de norme. Elle se traduit par un plus grand écart entre la solution de référence et la solution adaptée par rapport à la première approche. Par ailleurs, on constate que cette erreur de phase augmente au fil des itérations d'adaptation. Il y a une inconsistance de la solution en temps.

Ce décalage est dû au grand nombre d'interpolations qui sont effectuées dans l'algorithme d'adaptation de maillage. En effet, l'adaptation introduit, relativement à chaque changement de maillage (de la discrétisation et des connectivités), une source d'erreur importante due à l'interpolation de la solution de l'ancien maillage sur le nouveau, qui modifie les dérivées temporelles de la solution, Section 3.5. À cause du grand nombre d'interpolations, cette erreur devient dominante et elle a pour conséquence de décaler la solution dans le temps.

Pour vérifier que les problèmes, de diffusion et de décalage en temps, ne sont pas dûs au nombre d'adaptations choisi, nous effectuons trois nouvelles séries de calcul avec 40, 60 et 100 adaptations.

Avec 40 adaptations de maillage, la taille du maillage final obtenu est du même ordre (légèrement plus dense) que celle de la première approche et le temps de calcul a presque été multiplié par 2. Néanmoins, on tire les mêmes conclusions que précédemment, même si l'erreur a été diminuée, en effet l'intensité des chocs a été mieux préservée par rapport à la première approche (Figure 7, en haut). Mais, l'erreur L^2 (resp. H^1) sur $\Omega \setminus \mathcal{D}$ est plus de 2 (resp. 1.5) fois supérieure au seuil donné précédemment (cf. Tableau 2).

Si on effectue 60 adaptations de maillage, on constate, sur la Figure 7 (en haut), que l'intensité des chocs a été mieux préservée que dans les deux calculs précédents avec 20 et 40 adaptations. Par contre, on constate que l'écart en norme L^2 entre la solution de référence et la solution adaptée a augmenté, si on le compare à celui obtenu avec 40 adaptations de maillage. Ceci est dû à un léger décalage des chocs dans le domaine. L'erreur dû à l'interpolation de la solution à chaque changement de connectivités commence à devenir dominante.

Finalement, on procède à 100 adaptations de maillages et on arrive aux mêmes conclusions que dans la deuxième approche. L'erreur de phase a été diminuée, ce qui est consistant car le nombre d'interpolations a été réduit, mais elle est toujours présente (cf. Figure 7, en bas). Ceci se traduit par une diminution de l'erreur en norme L^2 (divisée par 2 sur $\Omega \setminus \mathcal{D}$) mais elle est encore supérieure à l'erreur commise en faisant 20 adaptations de maillage.

En conclusion, l'approche classique d'adaptation de maillage n'est pas applicable aux simulations instationnaires, car on ne contrôle pas la précision de la solution numérique, quelle que soit la façon d'aborder le problème.

Notons que si l'on désire obtenir, avec cette approche, une solution à un temps plus grand que t_{max} les solutions obtenues vont être de plus en plus éloignées de la solution de référence. En effet, l'erreur de phase va s'accroître si on garde un nombre d'adaptations proportionnel et si on conserve le même nombre d'adaptations c'est la diffusion des phénomènes qui va croître.

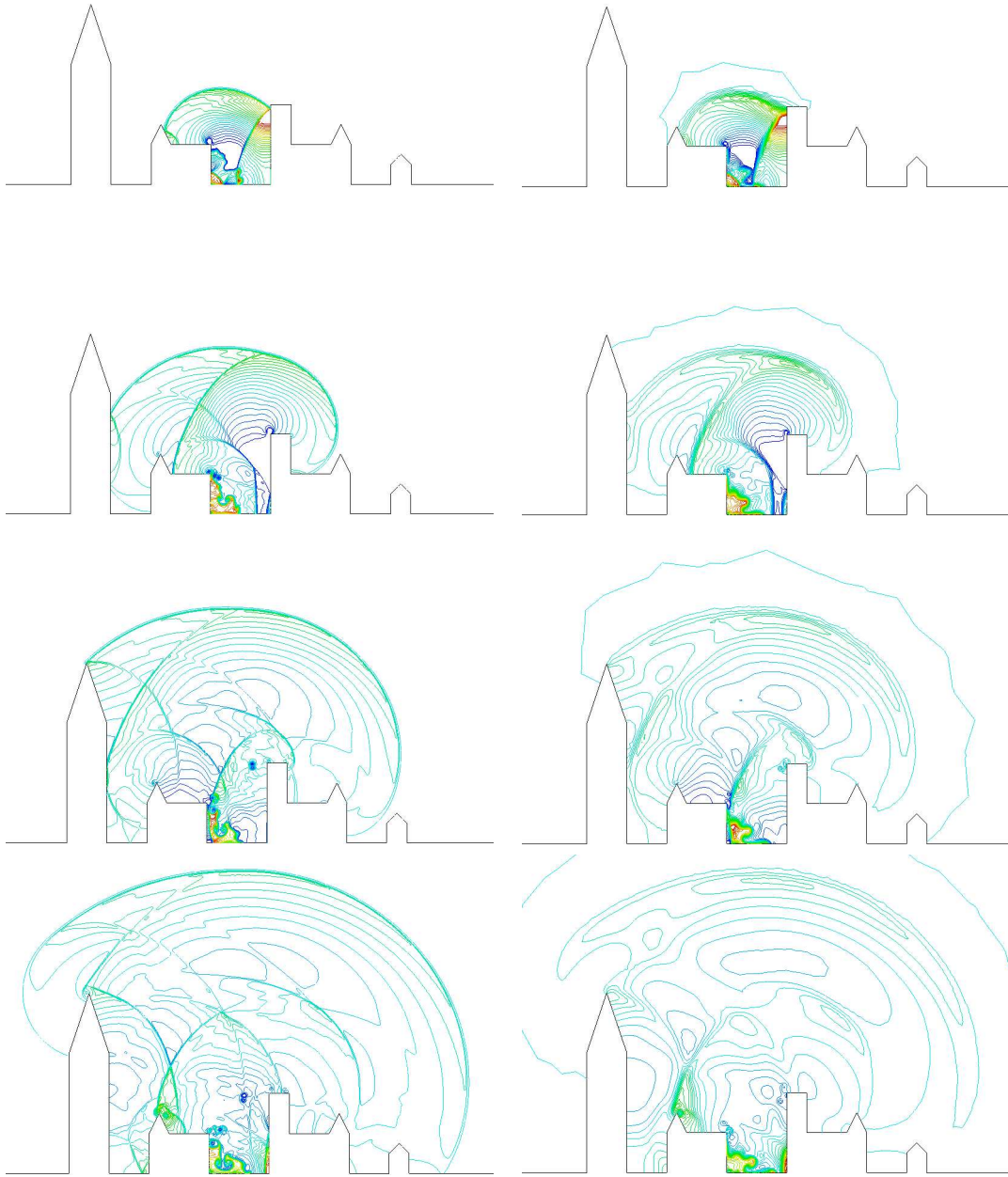


FIG. 3 – Évolution des iso-lignes de densité pour les solutions de référence (à gauche) et adaptée, 20 adaptations, (à droite) aux temps 0.05, 0.1, 0.15 et 0.2 seconde. On remarque que la diffusion de la solution s'accroît au fil des adaptations.

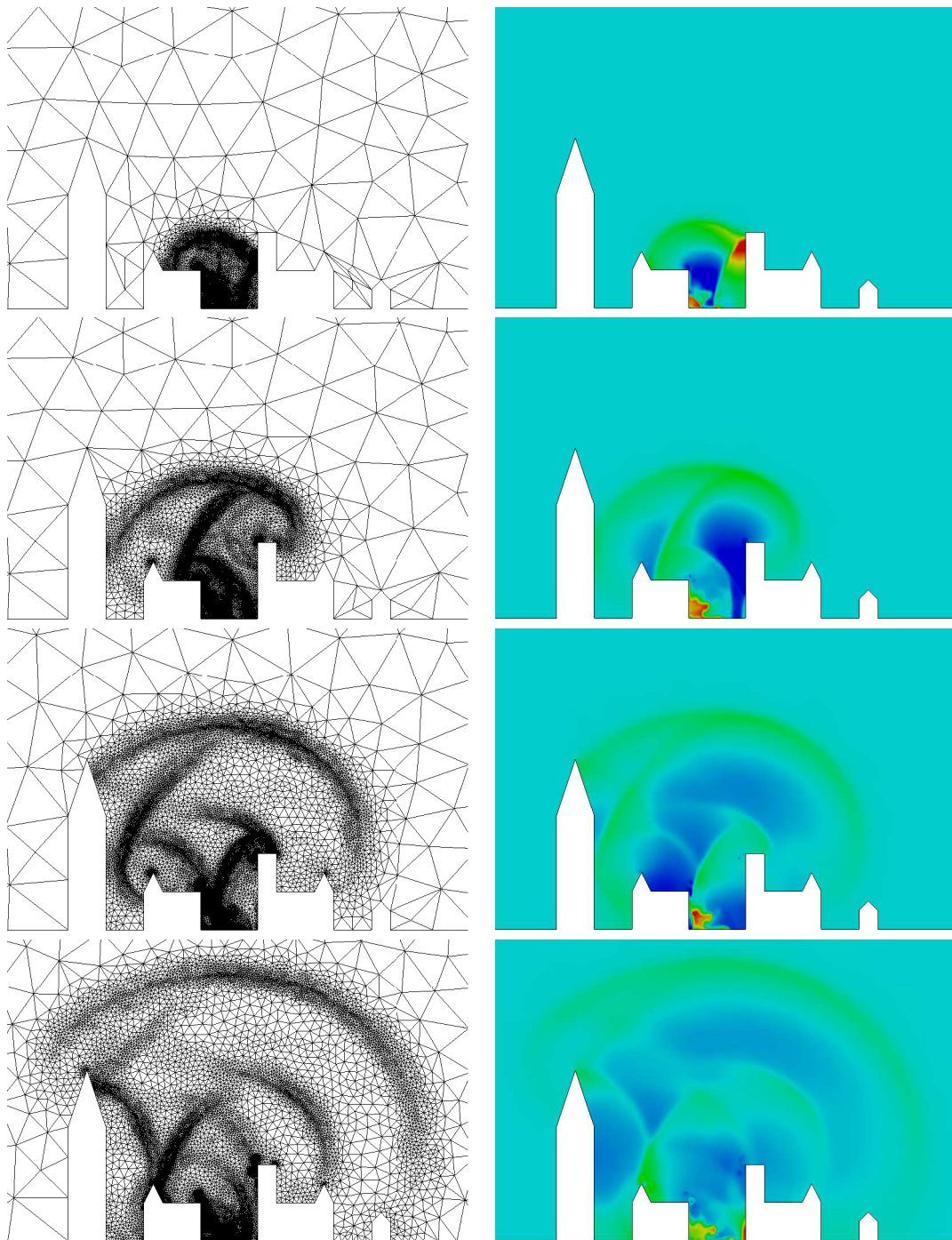


FIG. 4 – *Évolution des maillages adaptés (à gauche) et de la distribution d'iso-densités (à droite) aux temps 0.05, 0.1, 0.15 et 0.2 seconde, pour l'approche avec 20 adaptations de maillage.*

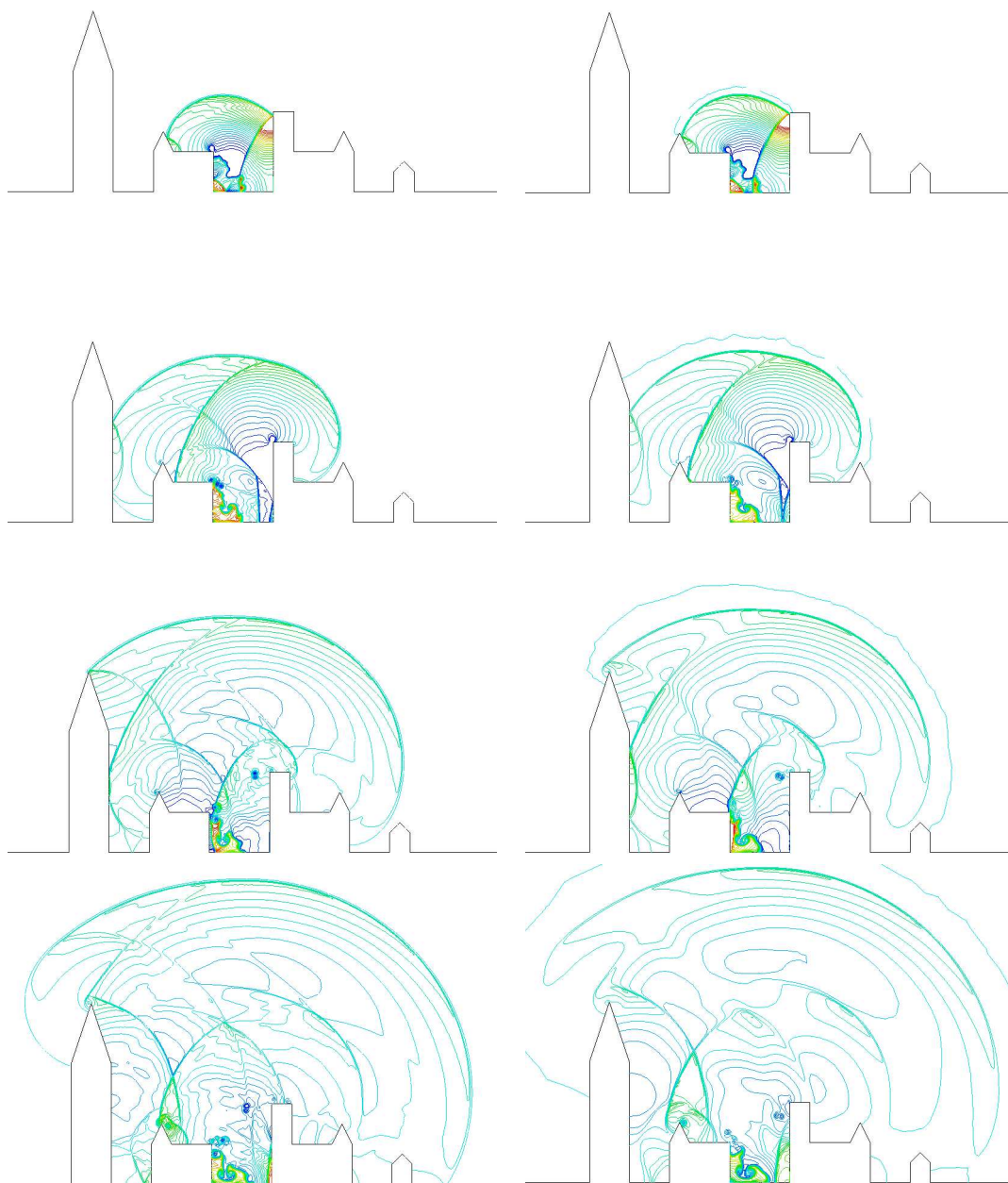


FIG. 5 – Évolution des iso-lignes de densité pour les solutions de référence (à gauche) et adaptée, 200 adaptations, (à droite) aux temps 0.05, 0.1, 0.15 et 0.2 seconde. On remarque que le décalage dans le temps de la solution s'accroît au fil des adaptations.

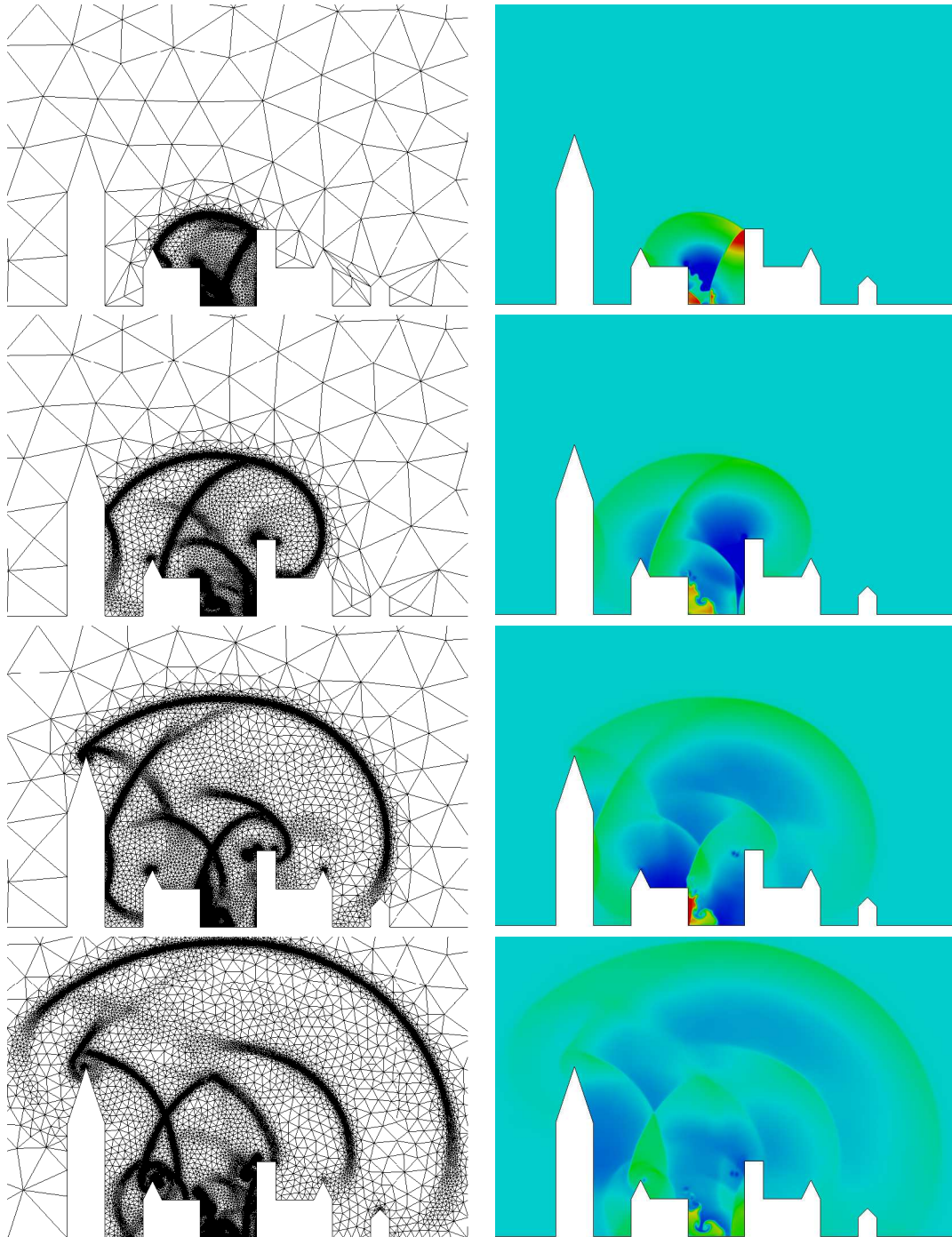


FIG. 6 – *Évolution des maillages adaptés (à gauche) et de la distribution d'iso-densités (à droite) aux temps 0.05, 0.1, 0.15 et 0.2 seconde, pour l'approche avec 200 adaptations de maillage.*

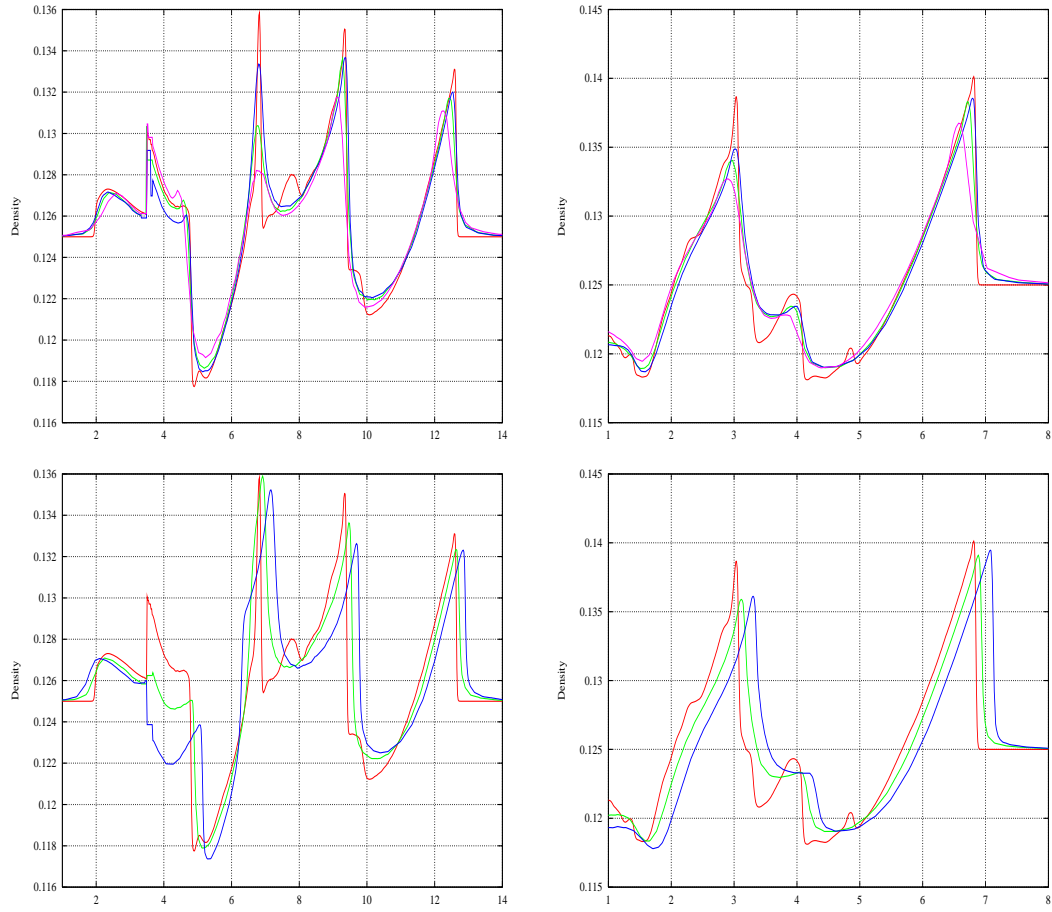


FIG. 7 – Valeurs de densité de la solution au temps $t_{\max} = 0.2$ seconde sur les droites d'équations $y = 4$ (à gauche) et $y = 3.07692x - 17.4615$ (à droite). Comparaison de la solution de référence (rouge) et des solutions adaptées. En haut, les solutions avec 40 (vert), 60 (bleu) et 20 (rose) adaptations de maillage. En bas, les solutions avec 100 (vert) et 200 (bleu) adaptations de maillage.

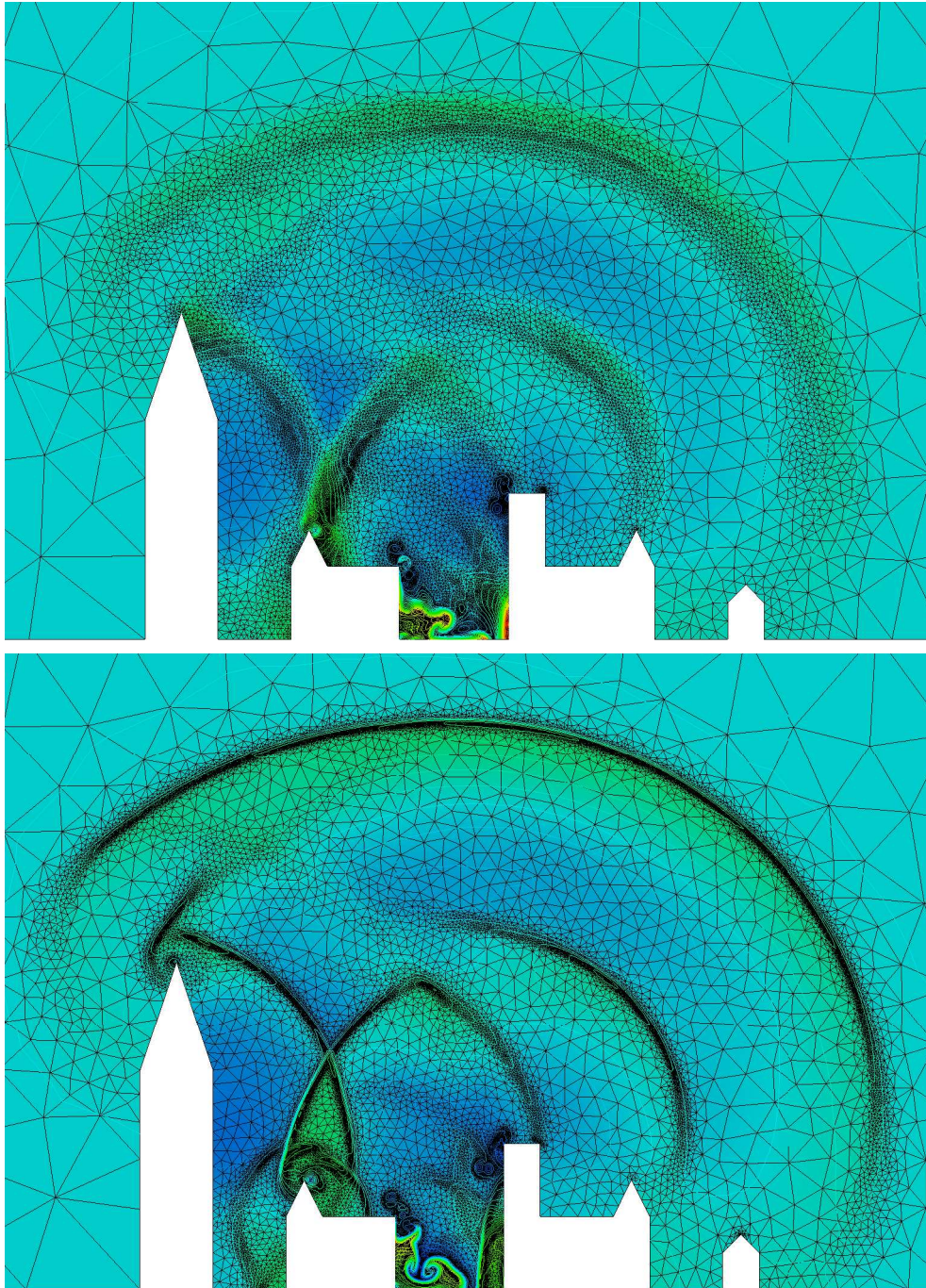


FIG. 8 – *Maillage final adapté et solution (densité) finale (calculée sur ce maillage) au temps $t_{max} = 0.2$ seconde. En haut, pour l'approche avec 20 adaptations de maillage, on remarque que les chocs sont sortis des régions denses du maillage. En bas, pour l'approche avec 200 adaptations de maillage, on remarque que les chocs sont restés dans les régions denses du maillage.*

3.5 Justification ...

Nous allons montrer que lors de l'adaptation de maillage, à chaque interpolation une erreur sur les dérivées en temps est introduite. Pour illustrer ce propos, nous considérons l'équation de transport (d'advection), problème hyperbolique linéaire du premier ordre, en dimension un :

$$u_t + c u_x = 0. \quad (4)$$

On suppose que l'on a une discrétisation uniforme en espace et en temps de pas respectivement Δx et Δt . En utilisant un schéma Euler explicite centré (centré en espace et explicite en temps), on obtient l'équation discrétisée suivante :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0, \quad (5)$$

qui donne l'expression de la dérivée temporelle discrète :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}. \quad (6)$$

Remarque 3.2 *On sait que le schéma (5) est (inconditionnellement) instable. Il est seulement utilisé pour montrer l'impact de l'interpolation sur les dérivées en temps de la solution.*

Nous allons d'abord démontrer que faire une interpolation linéaire peut être représenté par le schéma de Lax-Friedrichs. Pour l'équation de transport (4), la méthode des caractéristiques (pour laquelle on connaît la solution exacte des problèmes hyperboliques linéaires sous certaines conditions) nous apprend que la solution est constante sur toute droite d'équation $x - ct = K$, avec K constante. En particulier, on a donc, pour la solution exacte u du problème (4) :

$$u(x_j, t^{n+1}) = u(x_j - c\Delta t, t^n), \quad \forall j \in \mathbb{N} \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

La méthode (numérique) des caractéristiques consiste donc à utiliser l'égalité ci-dessus. Si le nombre de Courant $\frac{c\Delta t}{\Delta x}$ est entier alors le point $x_j - c\Delta t$ est un point du maillage et le schéma numérique est exact. Mais en général, le nombre de Courant n'est pas entier, par conséquent le point $x_j - c\Delta t$ n'appartient pas à la discrétisation. Il faut donc interpoler la solution au point $x_j - c\Delta t$ à l'instant t^n . Si on suppose $\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ (qui n'est autre que la condition CFL (Courant-Friedrichs-Levy) de stabilité du schéma de Lax-Friedrichs) alors on a $x_{j-1} \leq x_j - c\Delta t \leq x_{j+1}$. On interpole donc la solution au point $x_j - c\Delta t$ linéairement entre x_{j-1} et x_{j+1} et on obtient le schéma numérique :

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left(\left(1 + \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) u_{j-1}^n + \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) u_{j+1}^n \right), \quad (7)$$

appelé schéma aux caractéristiques avec interpolation linéaire sur maille. Or, en développant la Relation (7), on trouve le schéma numérique :

$$\frac{u_j^{n+1} - \left(\frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}\right)}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0, \quad (8)$$

qui n'est autre que le schéma de Lax-Friedrichs.

Le schéma de Lax-Friedrichs est un schéma de caractéristiques et peut être interprété comme le résultat d'une interpolation sur la discrétisation lors d'une méthode de caractéristiques. En d'autres termes, le schéma de Lax-Friedrichs représente l'impact d'une interpolation linéaire de la solution après avoir inséré un nouveau point x_j au milieu de l'intervalle $[x_{j-1}, x_{j+1}]$. L'interpolation linéaire de la solution donne $u_j^n = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}$ et en remplaçant dans (5), on trouve bien (8).

On peut réécrire le schéma de Lax-Friedrichs sous la forme :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2\Delta t} = 0,$$

ou encore,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0,$$

avec $\nu = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}$. On peut interpréter cette relation comme l'ajout d'un terme de diffusion (dissipation) dans le schéma (5). Effectivement, il est bien connu que l'interpolation introduit de la diffusion. Notons que seulement dans le cas où la solution est linéaire, il n'y a pas d'erreur due à l'interpolation.

De cette dernière relation, on déduit l'expression de la dérivée temporelle discrète en x_j :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}. \quad (9)$$

On constate que, par rapport à la Relation (6), l'interpolation de la solution a eu pour impact de modifier la dérivée temporelle de la solution par l'introduction d'un nouveau terme.

Dans nos simulations, cette modification de la dérivée temporelle se traduit par un décalage de la solution dans le temps. Cette erreur existe aussi pour les simulations stationnaires mais elle n'affecte pas la solution finale car la solution désirée est telle que ses dérivées temporelles sont nulles à convergence. La résolution du problème stationnaire par une méthode pseudo-instationnaire permet de corriger rapidement cette erreur (pour trouver la limite du problème stationnaire on fait tendre les dérivées temporelles vers zéro).

Cependant, cette justification mérite deux remarques :

Remarque 3.3 *Nous avons mis en évidence qu'il existe un décalage de la solution à cause de l'interpolation. Toutefois, l'intensité des chocs n'a pas été réduite. Donc,*

ce phénomène correspond plutôt à de la dispersion et non de la diffusion. Le même raisonnement que précédemment peut être effectué avec une interpolation quadratique. Il nous donnerait le schéma de Lax-Wendroff qui lui est dispersif. Cependant, dans notre approche une interpolation linéaire est effectuée.

Remarque 3.4 *Le schéma d'interpolation proposé n'est pas conservatif localement. En effet, si une arête est retournée (basculée) alors l'interpolation n'est plus conservative [21], de même, si un point est supprimé. Par contre, si un sommet est inséré elle est conservative. Or, si on considère l'équation de Burger sous forme non conservative avec un schéma décentré et comme données initiales un choc (la marche de hauteur 1), on vérifie aisément que la vitesse du choc est nulle. Cependant, d'après les relations de Rankine-Hugoniot on sait que le choc n'est pas stationnaire mais qu'il se propage à la vitesse $\frac{1}{2}$. La non-conservation a entraîné une modification de la vitesse du choc.*

Par conséquent, le décalage des chocs pourrait provenir de la non-conservation des variables pendant l'interpolation qui modifierait la vitesse à laquelle ils se déplacent à la première itération du solveur numérique.

Ces justifications doivent encore être vérifiées. Par exemple pour la Remarque 3.4, des problèmes autres que les lois de conservations peuvent être analysés pour regarder si le problème persiste encore. Une approche pour corriger ce problème serait de considérer un schéma d'approximation (et non plus d'interpolation) conservatif localement.

3.6 Interprétation de l'étude

Dans cette section, nous avons montré que l'algorithme classique d'adaptation de maillage est intrinsèquement inadapté à l'étude de problèmes dépendant du temps dans le cadre du remaillage. En effet, si le nombre d'adaptations est insuffisant alors une erreur de norme est commise et si un grand nombre d'adaptations est effectué alors une erreur de phase est commise.

Si on désire obtenir la solution à un temps t_{max} "raisonnable" vis-à-vis de l'intervalle de temps caractéristique du maillage τ (qui dépend de la taille de maille), on peut concevoir d'utiliser cet algorithme en utilisant un nombre d'adaptations adéquat, non connu *a priori*. Alors, les problèmes dus à l'interpolation ne sont pas encore apparents. Par exemple, cet algorithme donne un résultat correct dans le cas «classique» du tube à choc de Sod [20]. Par contre, si t_{max} est grand vis-à-vis de τ alors cet algorithme n'est plus applicable (comme dans le cas du problème modèle).

En conclusion, pour traiter les problèmes dépendant du temps avec l'adaptation de maillage (dans le cadre du remaillage), il faut proposer une nouvelle approche. Cette nouvelle approche fait l'objet de la section suivante.

4 Adaptation de maillage basée sur un point fixe transitoire

Dans les simulations instationnaires, on est confronté au problème de l'évolution des phénomènes physiques dans le domaine d'étude. Nous avons montré qu'en général le schéma classique d'adaptation est inadapté à l'étude de ce type de problèmes de part sa définition (cf. Section 3). En effet, si le nombre d'adaptations est insuffisant alors une erreur de norme est commise et si un grand nombre d'adaptations est effectué alors une erreur de phase est commise.

Pour y remédier, il faut soit trouver un nouveau schéma d'interpolation qui corrige ce problème, soit il faut diminuer le nombre d'adaptations de maillage à effectuer afin de contrôler l'erreur due à l'interpolation. La deuxième solution à l'avantage d'être d'application générale et indépendante de la méthode de résolution utilisée, nous allons donc choisir cette approche.

Dans cette approche, la procédure d'adaptation de maillage doit réduire le nombre total d'adaptations nécessaires pour effectuer la simulation mais elle doit conserver la précision de la solution tout en évitant de mailler une trop grande partie du domaine de calcul. En d'autres termes, l'objectif est de contrôler et d'augmenter l'intervalle de temps caractéristique du maillage, au sens de la Définition 3.1, ce qui se traduit par introduire le temps dans la métrique. Pour cela, deux points clefs doivent être pris en compte : (i) prédire l'évolution des phénomènes physiques dans le domaine et (ii) enrichir (adapter) le maillage dans toutes les régions où ces phénomènes évoluent.

Dans cette section, nous présentons cette nouvelle approche d'adaptation de maillage pour les problèmes instationnaires. Elle est basée sur une extension de l'algorithme d'adaptation de maillage, qui permet de résoudre un problème de point fixe transitoire pour le couple formé par le maillage et la solution, et sur une procédure d'intersection de métriques en temps pour introduire le temps dans la métrique. Nous illustrons cette approche sur un exemple simple qui est une généralisation bidimensionnelle du tube à choc de Sod. Elle est ensuite validée sur le problème modèle de propagation d'ondes non-linéaires introduit dans la Section 3.2.

4.1 Schéma d'adaptation instationnaire

Pour pouvoir prédire l'évolution des phénomènes physiques, nous proposons un nouvel algorithme d'adaptation de maillage dont le principe est de résoudre un problème de point fixe transitoire pour le couple formé par le maillage et la solution à chaque itération de la boucle d'adaptation. Il s'agit d'un algorithme itératif composé de deux boucles imbriquées, la boucle principale d'adaptation et une boucle interne dans laquelle est résolue le problème de point fixe transitoire.

À chaque itération de la boucle principale d'adaptation, on considère une période en temps $[t, t + \Delta t]$ pendant laquelle la solution évolue. Au cours de cette période, on cherche à converger vers la solution au temps $t + \Delta t$ et à converger (en un certain sens) vers le maillage adapté qui lui est associé, c'est-à-dire le maillage unitaire vis-à-vis d'une certaine métrique qui sera précisée plus loin. Plus précisément, à partir de la

solution au temps t , la solution jusqu'à $t + \Delta t$ est calculée et le calcul est recommencé jusqu'à ce que la précision désirée pour la solution numérique au temps $t + \Delta t$ soit atteinte. Ainsi, l'évolution de la solution peut être prédite et toutes les régions où la solution évolue peuvent être détectées. On peut donc définir une métrique qui prend en compte l'évolution de la solution à l'aide d'une procédure d'intersection de métriques en temps, Section 4.2. Ensuite, un nouveau maillage est généré suivant les requis de cette métrique, qui est adapté dans toutes les régions où les phénomènes physiques évoluent. Finalement, la solution initiale de cette période est interpolée et on recommence le calcul. Ce schéma est illustré sur la Figure 9, où i et j désignent respectivement les indices des itérations principales et internes d'adaptation et où on a noté respectivement \mathcal{T} , \mathcal{S} , \mathcal{S}^0 et \mathcal{M} le maillage, la solution, la solution initiale à chaque itération et la métrique.

Cet algorithme est une extension du schéma classique d'adaptation de maillage, si le nombre d'itérations internes est réduit à zéro alors on retrouve le schéma classique.

Pour analyser la convergence de la solution au sein de la boucle interne, on compare, à chaque itération, la solution obtenue et la solution de l'itération précédente. Pour cela, on considère la norme H^1 de la solution et la norme L^2 de la dérivée en temps de la solution. Si elles sont inférieures à une tolérance donnée alors la convergence est atteinte, on sort alors de la boucle interne et la boucle d'adaptation est itérée. Sinon, on recommence le calcul.

Si on note ϵ_1 et ϵ_2 les seuils de tolérance, on continue la résolution du problème de point fixe tant que j l'indice d'itération interne est plus petit que j_{max} ou bien que l'on ait :

$$\frac{\| |\mathcal{S}_{(i,j+1)}| - |\mathcal{S}_{(i,j)}| \|_{H^1(\Omega)}}{\| \mathcal{S}_{(i,j+1)} \|_{H^1(\Omega)}} \leq \epsilon_1 \quad \text{et} \quad \frac{\| |\frac{\partial \mathcal{S}_{(i,j+1)}}{\partial t}| - |\frac{\partial \mathcal{S}_{(i,j)}}{\partial t}| \|_{L^2(\Omega)}}{\| \frac{\partial \mathcal{S}_{(i,j+1)}}{\partial t} \|_{L^2(\Omega)}} \leq \epsilon_2,$$

où Ω est le domaine de calcul. Ce qui signifie que l'on veut contrôler la norme de la solution et les dérivées en temps de la solution. Par ailleurs, nous avons constaté que si on utilise un schéma de type Runge-Kutta pour l'intégration en temps, la deuxième condition n'est pas nécessaire.

4.2 Intersection de métriques en temps

Nous venons de voir précédemment un nouveau schéma d'adaptation qui nous permet de prédire l'évolution de la solution, il s'agit maintenant de préciser la procédure qui permet de mailler de manière adéquate les régions d'évolution de la solution. Pour cela, nous allons introduire une procédure d'intersection de métriques en temps.

Comme au cours du temps un phénomène physique évolue dans une région bien définie, si une solution précise est désirée (tout au long du calcul), un maillage avec des éléments de taille adéquate est nécessaire dans toute cette région. Pour générer un maillage adapté sous cette contrainte, il faut que la métrique prenne en compte cette information, c'est-à-dire il faut inclure le temps dans la définition de la métrique.

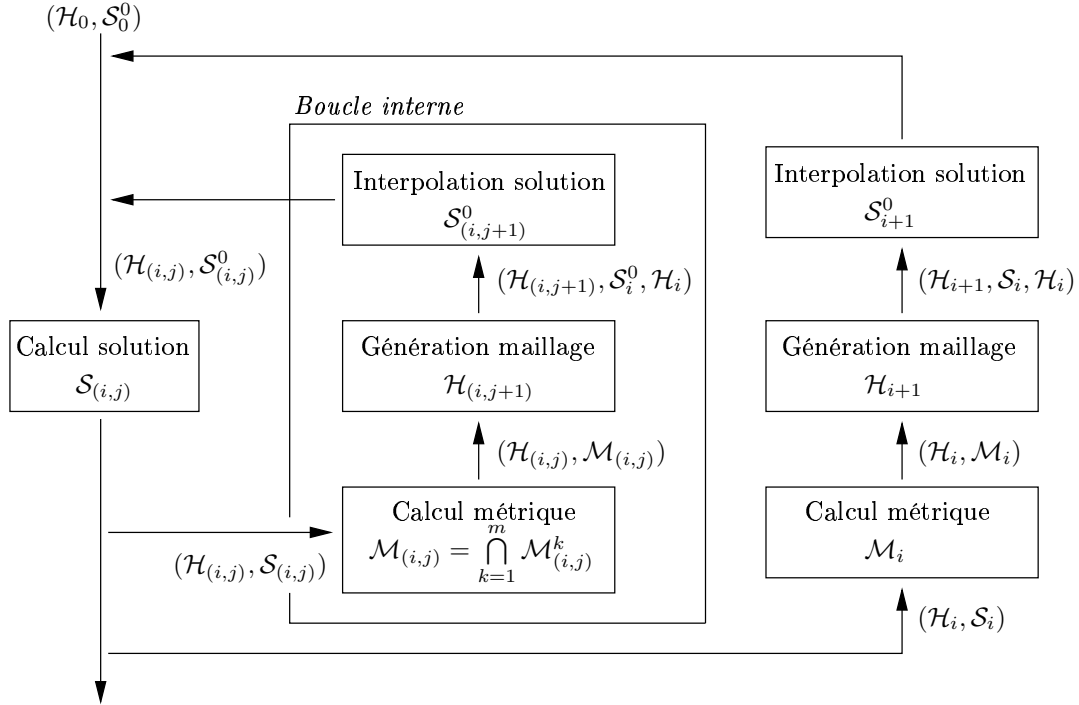


FIG. 9 – Schéma d'adaptation de maillage pour les simulations instationnaires.

Si on considère seulement la solution initiale de la période pour définir la métrique (comme dans le cas du schéma d'adaptation classique), alors le maillage est en retard par rapport à la solution. Par conséquent, les phénomènes sortent des régions adaptées du maillage (maillées finement). Si on considère seulement la solution finale de la période, alors le maillage précède la solution. Donc, on ne garantit pas que la précision de la solution est conservée car initialement les phénomènes ne sont pas dans les régions adaptées du maillage, même s'ils arrivent dans ces régions par la suite. Dans les deux cas, ceci a pour effet de diffuser la solution.

Pour y remédier, il faut prendre en compte, dans la définition de la métrique, la solution initiale et la solution finale de la période en intersectant leurs métriques respectives. Toutefois, si l'intervalle de temps Δt de la période est trop grand, il y a une dilution du maillage au milieu de la région définie par les solutions initiale et finale de la période. Impliquant de fait, pour le phénomène physique passant dans cette région, une perte de précision qui se traduit à nouveau par la diffusion du phénomène. Pour éviter cela, il faut prendre en compte les métriques de toutes les solutions intermédiaires (de la période) afin de mailler finement toute la région.

Ainsi, pour chaque variable utilisée dans la construction de la métrique, nous introduisons une intersection des métriques relatives aux solutions successives dans le temps. Nous appelons cette procédure : *intersection de métriques en temps*. Plus formellement, le tenseur de métrique, à la $i^{\text{ème}}$ période et à la $j^{\text{ème}}$ itération interne,

est donnée par :

$$\mathcal{M}_{(i,j)} = \bigcap_{\tau \in [t, t+\Delta t]} \mathcal{M}_{(i,j)}(\tau), \quad (10)$$

où $\mathcal{M}_{(i,j)}(\tau)$ est la métrique intermédiaire donnée par la solution numérique au temps τ et $\mathcal{M}_{(i,j)}$ est la métrique résultante utilisée pour adapter le maillage. En pratique, il suffit de considérer seulement un certain nombre de métriques provenant de solutions intermédiaires, uniformément réparties, entre les solutions initiale et finale pour que la région soit maillée de manière adéquate (le déplacement des phénomènes d'une itération à l'autre étant plus petit que la taille des éléments du maillage). Donc, le tenseur de métrique, à la $i^{\text{ème}}$ période et à la $j^{\text{ème}}$ itération interne, est donné par :

$$\mathcal{M}_{(i,j)} = \bigcap_{k=1}^m \mathcal{M}_{(i,j)}^k,$$

où $\mathcal{M}_{(i,j)}^k$ est la $k^{\text{ème}}$ métrique intermédiaire donnée par la solution numérique.

Les résultats donnés par les différentes approches, présentées ci-dessus, sont illustrés sur un exemple simple dans la Section 4.3.

Remarque 4.1 *Avec cette définition de la métrique, on garantit que pour toutes les solutions de la période (au long du calcul) l'erreur d'interpolation sur chaque élément est bornée par le seuil prescrit ε , tant que h_{\min} n'est pas atteint. Par contre, avec cette définition, pour chaque solution de la période, l'erreur d'interpolation n'est plus équirépartie sur le maillage. Les maillages générés avec cette méthode ne sont pas "optimaux" vis-à-vis d'une solution à un instant donné. Mais, on peut considérer qu'ils sont, en un certain sens, "optimaux" vis-à-vis du calcul au cours de la période.*

4.3 Illustration sur un exemple simple

Dans cette section, nous allons appliquer le nouvel algorithme d'adaptation de maillage pour les simulations instationnaires sur un exemple simple et nous allons analyser l'impact de l'intersection de métriques en temps.

L'exemple considéré est la généralisation bi-dimensionnelle du tube à choc de Sod (problème de Riemann) [20]. On considère le domaine $\Omega = [-1, 1] \times [0, 1]$ et on introduit une perturbation initiale de Heavyside dans la région \mathcal{R} définie par le demi-cercle de centre l'origine et de rayon $r = 0.05$. Les conditions initiales sur $\Omega \setminus \mathcal{R}$ sont : $\rho = 0.125$, $p = 0.1$ et $u = v = 0$ et pour \mathcal{R} : $\rho = 1$, $p = 1$ et $u = v = 0$, où ρ , p et $\vec{U} = (u, v)$ représentent respectivement la densité, la pression et le vecteur vitesse. On va analyser la solution au temps adimensionné $t_{\max} = 0.6$, en la comparant à une solution de référence calculée sur un maillage (non structuré) uniforme de taille $h = 0.005$ comportant 132 097 sommets et 262 656 triangles.

On effectue quatre séries d'adaptations de maillage. Elles ne diffèrent que par les solutions utilisées dans l'intersection de métriques en temps pour la construction de la métrique. On utilise pour la première série seulement la solution initiale de la période, pour la deuxième uniquement la solution finale de la période, pour la

troisième les solutions initiale et finale de la période et enfin pour la dernière six solutions uniformément réparties dans la période dont l'initiale et la finale.

Pour chaque série d'adaptations, on utilise la densité comme variable pour la définition de la métrique et on considère les paramètres suivants :

$$\varepsilon = 0.0022, h_{min} = 0.005, h_{max} = 0.5 \text{ et } h_{grad} = 10,$$

où ε est le seuil d'erreur prescrit, h_{min} (resp. h_{max}) la taille minimale (resp. maximale) autorisée et h_{grad} la gradation (*i.e.*, le rapport de taille maximal entre deux éléments voisins). On effectue au total 5 itérations (principales) d'adaptations de maillage, ce qui correspond à une adaptation tous les $\Delta t = 0.12$ et 5 itérations dans la boucle interne. Le maillage initial est un maillage grossier uniforme (non structuré) du domaine de calcul de 2177 sommets et 4160 triangles.

La Figure 12 montre la solution de référence au temps t_{max} (en haut à gauche) et pour les séries de calcul 1, 2, 3 et 4 (de bas en haut) les solutions adaptées au temps t_{max} avec les maillages correspondants. On voit clairement la perte d'intensité des phénomènes, pour les trois premières séries de calcul. On constate, en particulier, la dilution du maillage lorsqu'on ne considère que les solutions initiale et finale pour l'intersection de métriques. Par contre dans le cas de la série 4, en considérant six solutions intermédiaires on remarque que la région d'évolution des phénomènes est uniformément maillée (zoom en haut à droite) et que la précision de la solution a été conservée. On peut voir plus précisément l'impact du choix des solutions pour l'intersection de métriques en temps sur la Figure 10, où on a la densité de la solution sur les droites d'équations $y = x$ et $y = 0.15$ traversant le domaine pour les quatre séries d'adaptations et la solution de référence.

On constate sur la Figure 11 que les régions où évoluent les phénomènes ont été maillées uniformément dans le cas où cinq intersections de métriques (six solutions) ont été considérées, ce qui permet de conserver la précision de la solution tout au long de son évolution. De plus, on remarque que l'on a maillé juste la région d'évolution ni plus ni moins. En d'autres termes, on contrôle l'intervalle de temps caractéristique du maillage.

Le Tableau 3 reporte les statistiques des maillages finaux adaptés et l'erreur relative (Relation (3)) commise dans chaque cas par rapport à la solution de référence. On a noté ns le nombre de sommets et ne le nombre d'éléments. L'erreur relative est évaluée en normes $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$. Cependant, comme dans la Section 3.3, pour avoir une erreur plus représentative on analyse l'erreur sur $\Omega^* = \Omega \setminus \mathcal{D}$ où \mathcal{D} est la région délimitée par le demi-cercle de centre l'origine et de rayon $r = 0.16$.

L'évaluation des erreurs confirme ce qui a été énoncé précédemment. Pour la série 4, l'erreur L^2 est de 0.012 ce qui est un ordre de grandeur inférieur aux séries 1 et 2. Dans le cas de la série 3, la dilution du maillage a eu pour effet de multiplier l'erreur par cinq. On constate, en outre, que l'erreur sur les dérivées est aussi contrôlée, ce qui se traduit par une norme H^1 nettement inférieure pour la série 4 par rapport aux autres séries.

	ns	ne	$\ \cdot\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \cdot\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \cdot\ _{L^2(\Omega^*)}$	$\ \cdot\ _{H^1(\Omega^*)}$
Solution initiale	5 597	11 034	0.2261	0.9685	0.2030	0.8776
Solution finale	5 967	11 782	0.1212	0.7881	0.1125	0.7491
2 intersections	16 031	31 855	0.0673	0.5838	0.0601	0.5929
6 intersections	30 650	61 052	0.0398	0.3671	0.0120	0.1987

TAB. 3 – Statistiques des maillages finaux adaptés et les erreurs commises pour chaque série de calcul.

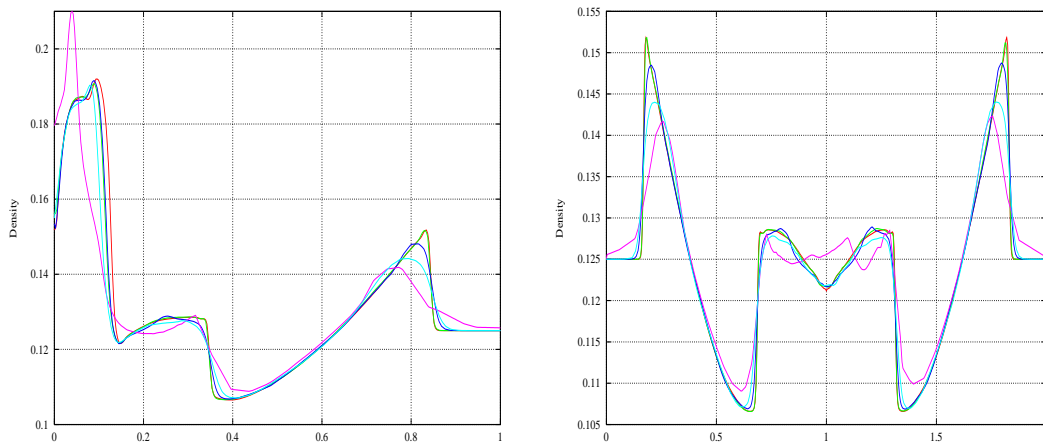


FIG. 10 – Comparaison de la solution de référence (rouge) et des solutions adaptées avec 5 intersections de métriques (vert), une intersection de métriques (bleu), uniquement la solution initiale (rose) et uniquement la solution finale (turquoise).

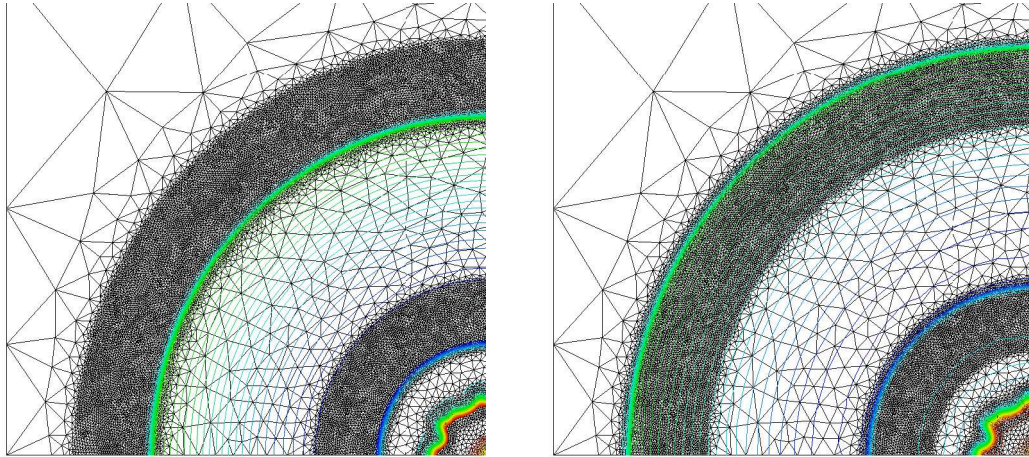


FIG. 11 – Impact de l'intersection de métriques en temps à l'itération 6 dans le cas où on a pris 6 solutions intermédiaires. Maillage adapté superposé avec la solution initiale (à gauche) et la solution finale (à droite) de la période.

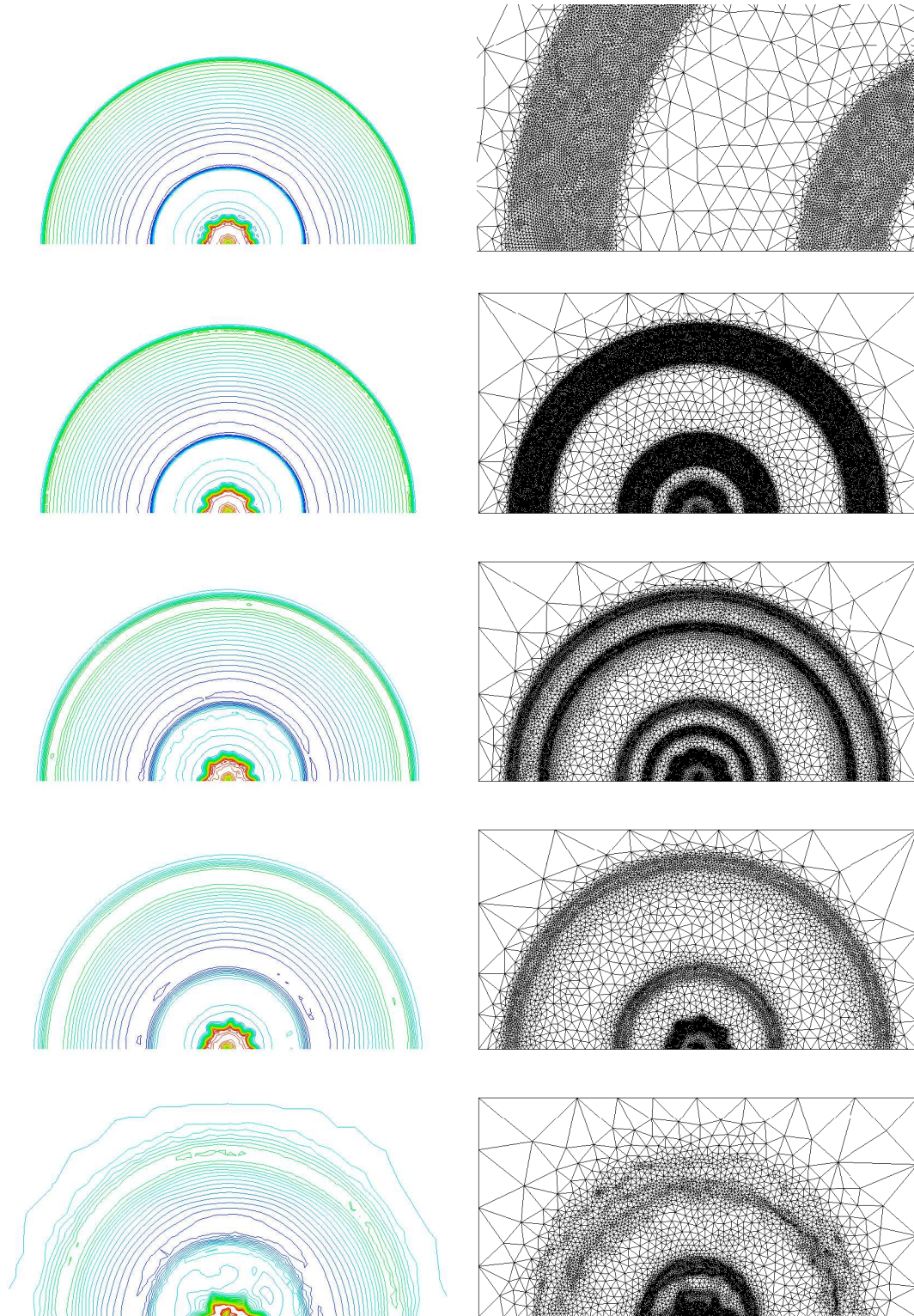


FIG. 12 – *Iso-lignes de densité de la solution et les maillages correspondants pour (de haut en bas) la référence et les séries 4, 3, 2 et 1 d'adaptation.*

4.4 Application au problème modèle

Le but de cette section est de valider la nouvelle approche d'adaptation de maillage basée sur un point fixe transitoire sur le problème modèle de propagation d'ondes non-linéaires introduit dans la Section 3.2. Comme dans le cas de l'adaptation classique (cf. Section 3.4), le but est d'atteindre la solution au temps physique $t_{max} = 0.2$ seconde. Nous comparerons les solutions (adaptées) obtenues à la solution dite de référence considérée dans la Section 3.3, l'écart entre les solutions étant toujours calculé à l'aide de la Relation (3).

Pour la simulation, les mêmes paramètres et les mêmes variables que dans le cas de l'adaptation classique sont utilisés afin d'avoir la même complexité. Plus précisément, on utilise la densité comme variable pour la définition de la métrique et les paramètres pour l'adaptation de maillage suivants :

$$\varepsilon = 0.001, h_{min} = 0.15 \text{ m}, h_{max} = 20 \text{ m} \text{ et } h_{grad} = 4,$$

où ε est le seuil d'erreur prescrit, h_{min} (resp. h_{max}) la taille minimale (resp. maximale) autorisée et h_{grad} la gradation (*i.e.*, le rapport de taille maximal entre deux éléments voisins). La simulation débute avec le même maillage initial, adapté aux conditions initiales, (cf. Figure 2). L'intervalle de temps de la simulation est découpé en 16 périodes, c'est-à-dire qu'à chaque période on avance de $\Delta t = 0.0125$ seconde. On utilise 7 solutions intermédiaires (dont l'initiale et la finale) uniformément réparties pour l'intersection de métriques en temps. On effectue au *maximum* 5 itérations internes et on utilise comme seuil de tolérance pour la convergence dans la boucle interne: $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.03$.

La Figure 15 montre l'évolution de la solution de référence et la solution adaptée. On constate que l'intensité de la solution a été préservée et que les phénomènes sont bien situés dans le domaine de calcul. On le voit plus précisément sur la Figure 13 (en haut), où on a la densité de la solution le long des droites d'équation $y = 4$ et $y = 3.07692x - 17.4615$ traversant le domaine. On remarque que la nouvelle approche donne une solution beaucoup plus précise par rapport à l'approche classique. La Figure 14, montre l'impact de l'intersection de métriques en temps, où on a la solution initiale (en haut) et la solution finale (en bas) de la dernière période sur le maillage final adapté au temps $t_{max} = 0.2$ seconde. On constate que les régions d'évolution des phénomènes ont été maillées uniformément pour préserver la précision de la solution et que les phénomènes restent dans les régions adaptées du maillage. L'intervalle de temps caractéristique du maillage est de l'ordre du pas de la période: $\tau \approx \Delta t$.

Dans le Tableau 4, on peut voir l'impact de la méthode sur l'erreur commise. Plus précisément, l'erreur sur $L^2(\Omega)$ (resp. $H^1(\Omega)$) est de $0.0071 \leq 0.008$ (resp. $0.335 \leq 0.34$), elle est donc inférieure aux seuils donnés dans la Section 3.3. Elle est même inférieure aux erreurs commises avec les maillages uniformes à $2h_{min}$ et $4/3h_{min}$. De même, l'erreur sur $L^2(\Omega \setminus \mathcal{D})$ (resp. $H^1(\Omega \setminus \mathcal{D})$) est de $0.0018 \leq 0.002$ (resp. $0.084 \leq 0.1$) ce qui est encore inférieur aux seuils fixés. La solution obtenue est donc "proche" de la solution de référence, au sens donné dans la Section 3.3.

Le nombre d'itérations internes effectuées au cours de chaque période (pour faire converger le couple maillage-solution vers le point fixe transitoire) varie entre 3 et 5 avant que l'écart entre deux solutions successives ne soit satisfait (il est toujours satisfait). Généralement 3 itérations suffisent pour converger (dans cet exemple, c'est le cas dans 80% des périodes pour chaque simulation). Le maillage final adapté avec cette nouvelle approche comporte 99 275 sommets, c'est-à-dire sa taille a été réduite d'un ordre de grandeur par rapport à celle du maillage de référence. Ceci a un impact direct sur le temps de calcul qui a été divisé par plus de 11.

Deux séries de calcul supplémentaires sont effectuées pour analyser l'impact du nombre d'adaptations avec la nouvelle approche. Cette fois, on considère 12 et 20 adaptations (*i.e.*, périodes) et on utilise respectivement 8 et 6 solutions intermédiaires (dont l'initiale et la finale) uniformément réparties pour l'intersection de métriques en temps. Pour les autres paramètres, on conserve les mêmes que précédemment (pour avoir la même complexité). Comme on pouvait s'y attendre, la solution est plus précise si on effectue moins d'interpolations, Tableau 4, car on introduit moins d'erreurs sur les dérivées en temps. Le temps de calcul est du même ordre pour les trois simulations, même si la taille du maillage est, bien entendu, plus grande si on effectue moins d'adaptations (l'intervalle de temps caractéristique étant plus grand). Sur la Figure 13 (en bas), on constate que les trois solutions obtenues sont quasiment identiques.

En conclusion, le nombre d'adaptations effectuées a un faible impact sur la précision de la solution, même si elle est plus précise en effectuant moins d'adaptations. Toutefois, il faut éviter d'effectuer trop peu d'adaptations ce qui aurait pour conséquence de mailler finement une trop grande partie du domaine de calcul et bien sûr d'adapter trop souvent pour contrôler l'erreur sur les dérivées en temps. Autrement dit, le temps Δt entre deux itérations d'adaptations devient un nouveau paramètre qui permet de contrôler la taille des maillages.

Finalement, une dernière simulation est effectuée pour analyser l'impact de l'utilisation de plusieurs variables dans la définition de la métrique. On considère exactement les mêmes paramètres que dans l'approche avec 12 adaptations de maillages mais cette fois on adapte le maillage par rapport aux variables de densité, pression et énergie. La solution obtenue est encore plus précise que précédemment, Tableau 4. En effet, on contrôle mieux l'écart (erreur d'interpolation) pour chaque variable. Ceci a un impact direct sur la taille du maillage qui comporte 129 224 sommets au lieu de 110 240 sommets avec seulement la densité. Ceci se traduit par une augmentation du temps de calcul (hausse de 15%).

Cette nouvelle approche a permis de préserver l'intensité des phénomènes et donc de contrôler l'erreur de norme en maillant de manière adéquate les régions d'évolution des phénomènes. De plus, en réduisant le nombre d'interpolations (ici seulement 12 à 20 interpolations ont été effectuées) on a contrôlé l'erreur sur les dérivées en temps et donc l'erreur de phase. Avec cette nouvelle approche, on a implicitement introduit le temps dans l'estimateur d'erreur (par le biais de l'intersection de métriques en temps) en contrôlant l'intervalle de temps caractéristique du maillage.

n_{adap}	np	ne	$t\ cpu^a$	$\ \cdot\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \cdot\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \cdot\ _{L^2(\Omega^*)}$	$\ \cdot\ _{H^1(\Omega^*)}$
12	110 240	219 708	3h14	0.0069	0.325	0.0016	0.077
16	99 275	197 814	3h16	0.0071	0.335	0.0018	0.084
20	86 396	172 116	3h11	0.0071	0.338	0.0020	0.092
12(3)	129 224	257 626	3h45	0.0062	0.317	0.0013	0.069
\mathcal{H}_{ref}	1 345 824	2 686 286	37h30	-	-	-	-

TAB. 4 – Statistiques des maillages finaux adaptés pour les approches instationnaires avec 12 (avec 1 et 3 variables), 16 et 20 adaptations de maillage et les erreurs relatives des solutions (densité) finales sur Ω et $\Omega^* = \Omega \setminus \mathcal{D}$.

^a Station de travail HP9000 à 500 Mhz.

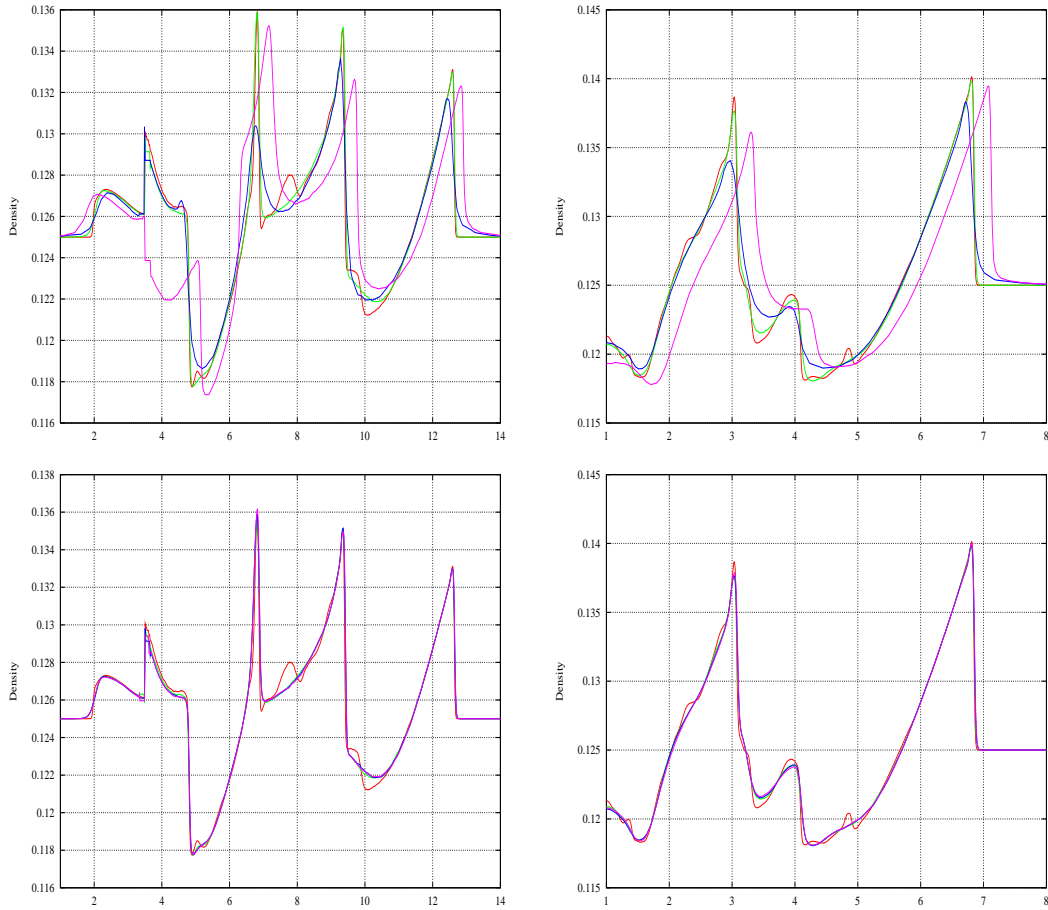


FIG. 13 – Valeurs de densité de la solution au temps $t_{max} = 0.2$ seconde sur les droites d'équations $y = 4$ (à gauche) et $y = 3.07692x - 17.4615$ (à droite). Comparaison de la solution de référence (rouge) et des solutions adaptées. En haut, la solution avec 16 adaptations instationnaires de maillage (vert) et les solutions avec 40 (bleu) et 200 (rose) adaptations classiques de maillage. En bas, les solutions avec 12 (vert), 16 (bleu) et 20 (rose) adaptations de maillage instationnaires.

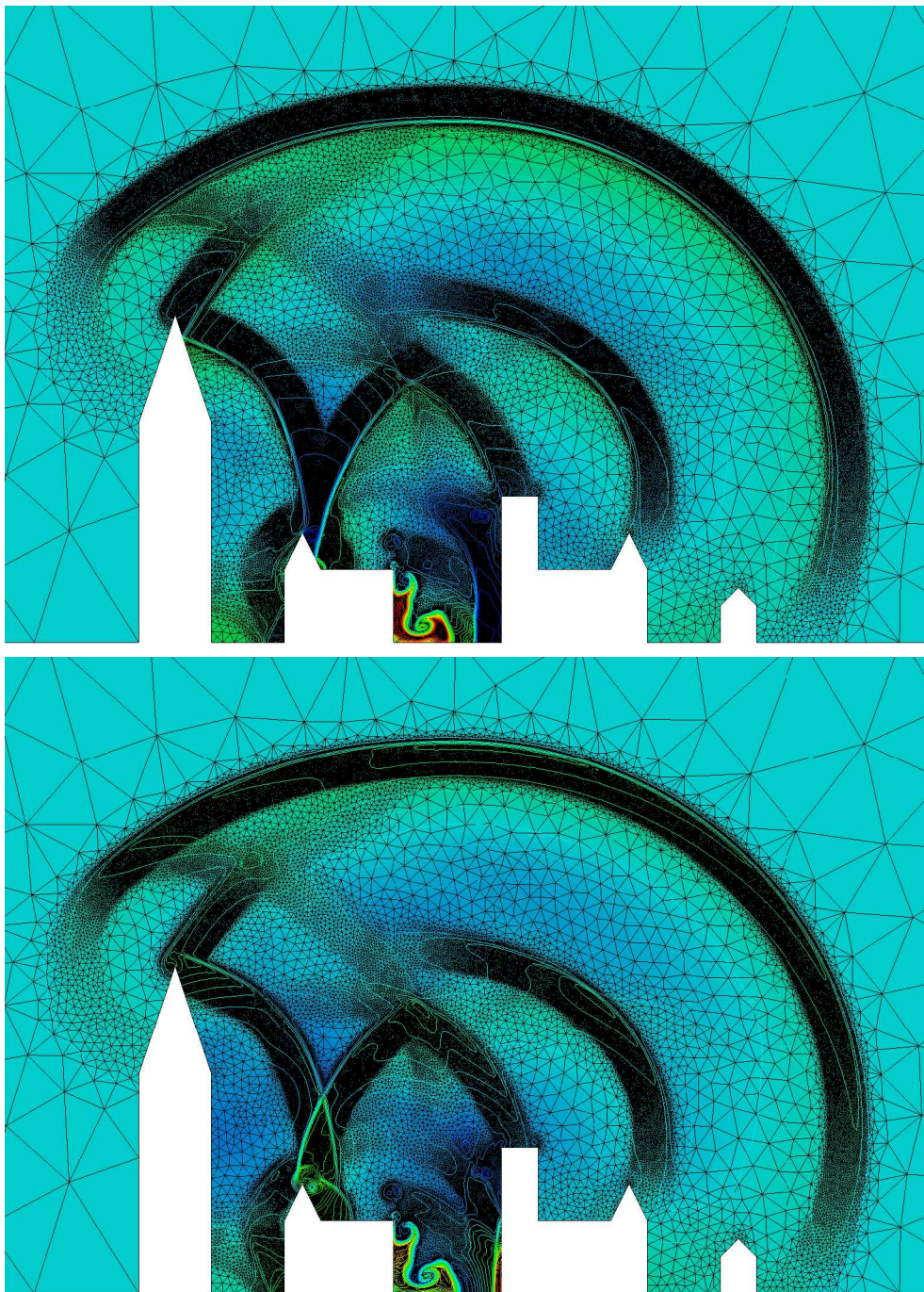


FIG. 14 – Maillage final adapté pour l'approche instationnaire avec 16 adaptations de maillage et les solutions (densité) correspondantes. En haut, solution initiale de la dernière période au temps $t = 0.1875$ seconde et en bas, solution finale de la dernière période au temps $t_{max} = 0.2$ seconde.

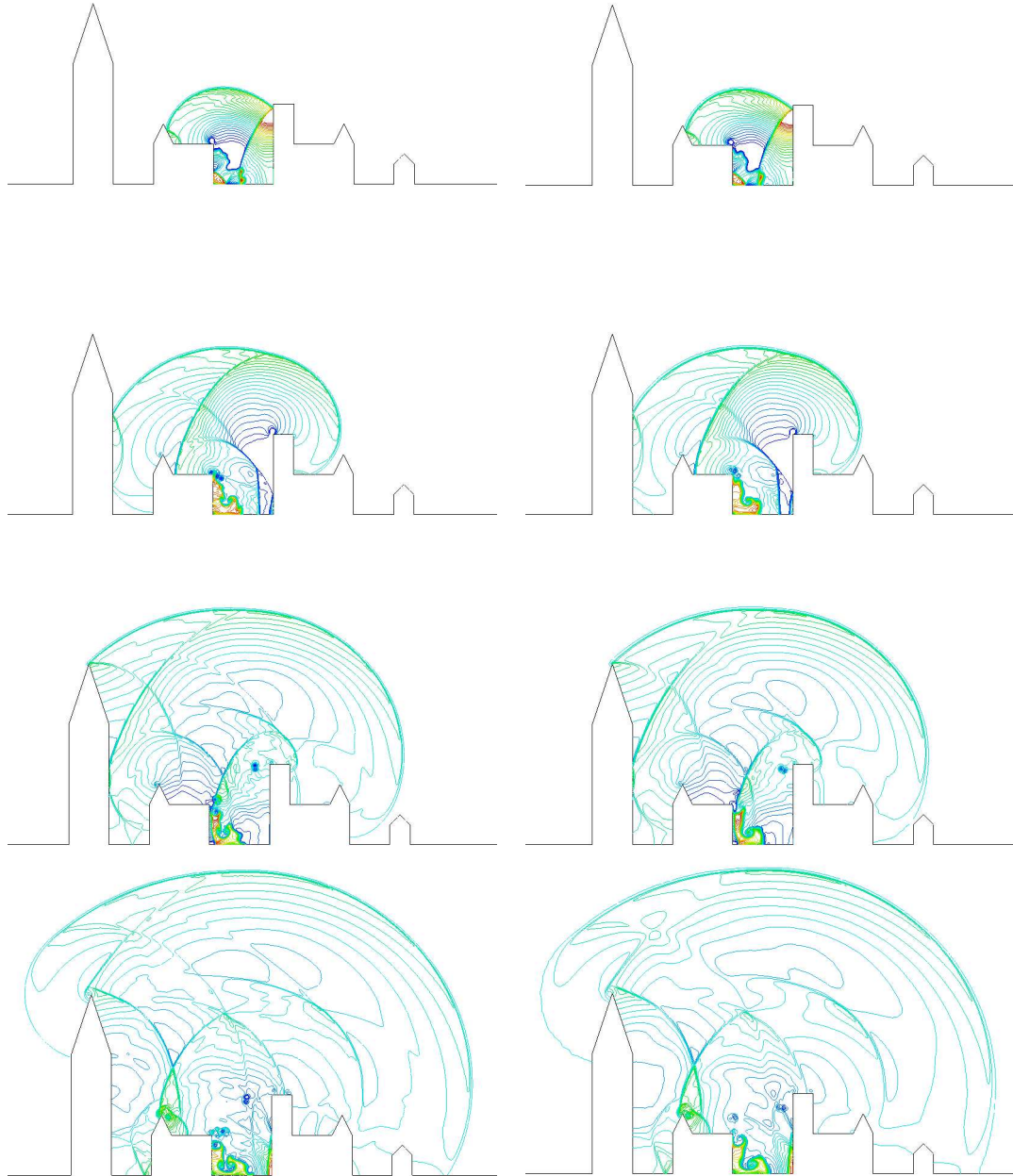


FIG. 15 – Évolution des iso-lignes de densité pour les solutions de référence (à gauche) et adaptée, 16 adaptations, (à droite) aux temps 0.05, 0.1, 0.15 et 0.2 seconde.

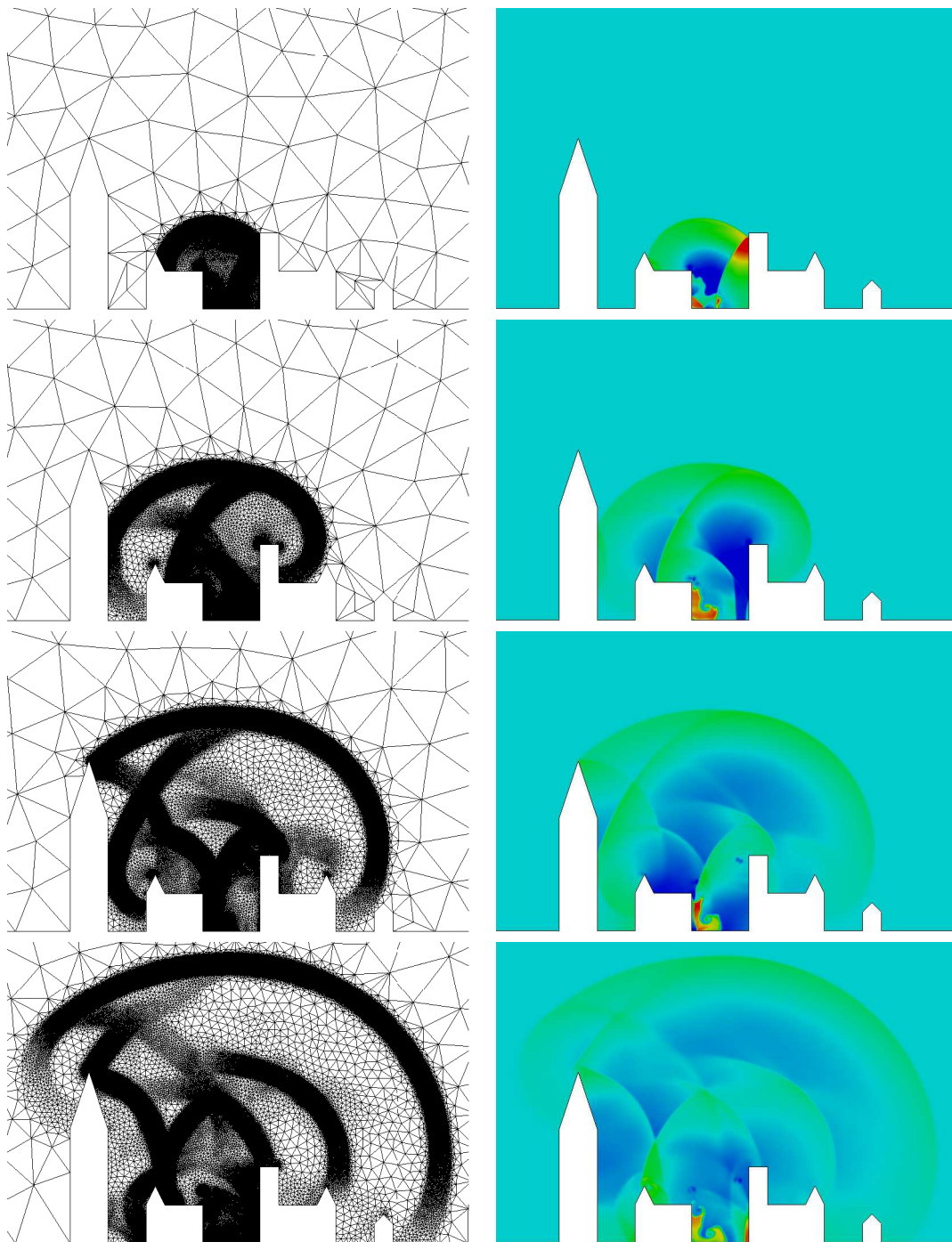


FIG. 16 – Évolution des maillages adaptés (à gauche) et de la distribution d'iso-densités (à droite) aux temps 0.05, 0.1, 0.15 et 0.2 seconde, pour l'approche instationnaire avec 16 adaptations de maillage.

5 Propagation d'ondes non-linéaires 3D

Dans cette section, nous allons appliquer l'adaptation de maillage basée sur un point fixe transitoire en dimension trois pour montrer la validité de l'approche sur un cas réel et concret. Le problème considéré est la propagation d'ondes non-linéaires dans une géométrie complexe qui simule l'évolution d'une explosion dans une place dans une ville, Figure 17. La simulation ce type de problème avec précision est capitale étant donné qu'il n'est pas possible de réaliser ces simulations en réalité. Aujourd'hui, il existe une demande dans la réalisation de telles simulations numériques, on citera par exemple l'étude de l'impact d'une explosion dans le World Trade Center [4].

Cette simulation est l'extension du problème modèle en dimension trois, Section 3.2. Pour les conditions initiales en dimension trois, l'air ambiant a les mêmes propriétés qu'en dimension deux, par contre la région initiale de haute densité a pour domaine la demi-sphère de centre $(42, 54, 0)$ et de rayon 2.5 mètres, et pour conditions initiales $\rho = 1$, $p = 1$ et $u = v = w = 0$, où ρ , p et $\vec{U} = (u, v, w)$ qui représentent respectivement la densité, la pression et le vecteur vitesse.

Dans cet exemple, le but est d'obtenir la solution au temps physique 0.1 seconde. On décompose la simulation en 30 périodes, *i.e.*, 30 itérations principales d'adaptation, c'est-à-dire que pour chaque période on avance en temps de $\Delta t = 0.0033$ seconde. À chaque itération de la boucle principale, on effectue 4 itérations internes pour résoudre le problème de point fixe transitoire. On considère une métrique isotrope basée sur la variable de densité, variable pour laquelle on désire contrôler l'erreur. On a utilisé 5 solutions intermédiaires (dont l'initiale et la finale) pour l'intersection des métriques en temps et les paramètres d'adaptation suivants :

$$\varepsilon = 0.003, h_{min} = 0.3 \text{ m}, h_{max} = 10 \text{ m} \text{ et } h_{grad} = 3,$$

où ε est le seuil d'erreur prescrit, h_{min} (resp. h_{max}) la taille minimale (resp. maximale) autorisée et h_{grad} la gradation (*i.e.*, le rapport de taille maximal entre deux éléments voisins). Il est à noter que la taille du domaine de calcul est de $85 \times 85 \times 70 \text{ m}^3$, donc un maillage uniforme avec tous ses éléments réguliers de côté $h = h_{min}$, aurait une taille de l'ordre de $1.8 \cdot 10^7$ sommets. Un maillage de calcul initial relativement grossier de 40 230 sommets a été généré, Figure 17 (à droite). La Figure 18 montre la propagation des ondes à différents instants (iso-surfaces de densité) dans la géométrie.

Le Tableau 5 donne les caractéristiques des maillages adaptés aux itérations 8, 15, 23 et 30, c'est-à-dire respectivement au temps 0.027, 0.05, 0.077 et 0.1 seconde. Les Figures 19 et 20-21 montrent respectivement l'évolution des maillages isotropes de surface et de volume adaptés (dans un plan de coupe où les tétraèdres sont coupés en hérisson) avec les distributions d'isodensités correspondantes au cours de ces itérations. Sur ces figures, la densité du maillage indique clairement les régions où évoluent les phénomènes (les ondes de choc) pendant les périodes correspondantes. Les

raffinements du maillage ont été prescrits par l'intersection des métriques en temps, qui est un point clef de cet algorithme. Elle permet d'avoir une densité uniforme dans la région d'évolution des phénomènes au cours de la période, donc de préserver la précision de la solution au cours du calcul, et bien sûr de suivre l'évolution des phénomènes.

La Figure 22 illustre l'intersection de métriques en temps, on peut voir l'évolution de la solution au cours de la période, à gauche la solution initiale et à droite la solution finale. On constate que la région adaptée est "optimale" au sens où le temps caractéristique du maillage τ est de l'ordre du temps Δt entre deux adaptations. De plus, on remarque qu'elle est à la fois définie pour le maillage de surface et pour le maillage de volume. Sur la Figure 23, on voit clairement le caractère imprévisible des phénomènes physiques, avec notamment un grand nombre de rebonds sur les bâtiments.

Cette simulation a été effectuée sur une station de travail HP9000 à 400 Mhz avec 1 Go de mémoire. À l'itération 23, la génération du maillage final (739 854 sommets) a duré 10 secondes pour la surface et 310 secondes pour le volume. Pour le calcul de l'écoulement, le solveur (explicite) met à peu près 4 heures pour effectuer 100 itérations sur un maillage de 750 000 sommets. Le nombre d'itérations de solveur effectuées entre deux adaptations dépend des caractéristiques de l'écoulement et de la taille des éléments du maillage, il est donc assez variable. Par exemple, à l'itération 23 le solveur a effectué environ 200 itérations au cours de la dernière période. On constate que le solveur numérique contribue à hauteur de 95 % du temps de calcul global. La simulation dans son intégralité a duré une dizaine de jours.

Itération	Temps physique	Sommets	Tétraèdres	Triangles
8	0.027	280 525	1 630 619	40 736
15	0.05	603 644	3 541 268	63 526
23	0.077	739 854	4 326 861	78 816
30	0.1	743 735	4 328 741	87 322

TAB. 5 – Évolution de la taille des maillages adaptés au fil des itérations (ou du temps). On précise le nombre de sommets, de tétraèdres et d'éléments de surface (triangles) de chaque maillage.

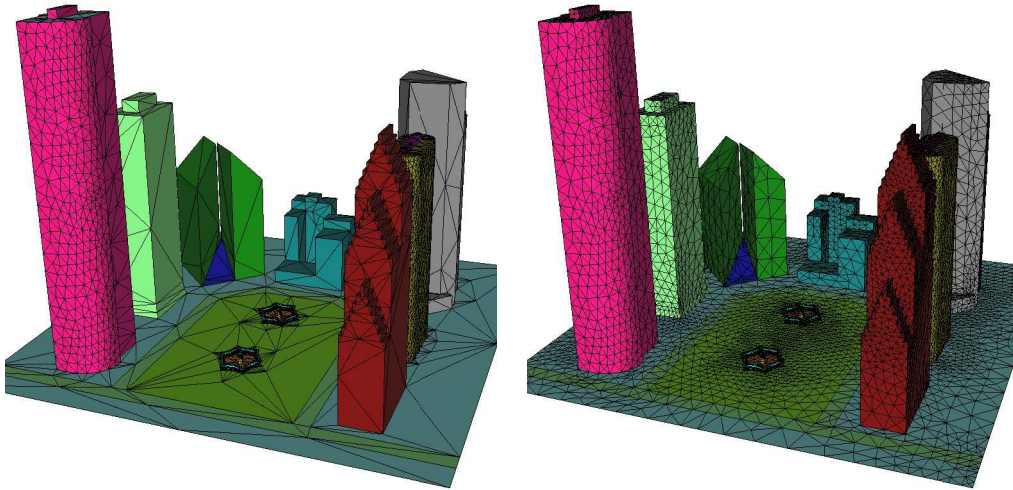


FIG. 17 – À gauche, maillage géométrique de la surface du domaine. À droite, le maillage de calcul de surface initial.

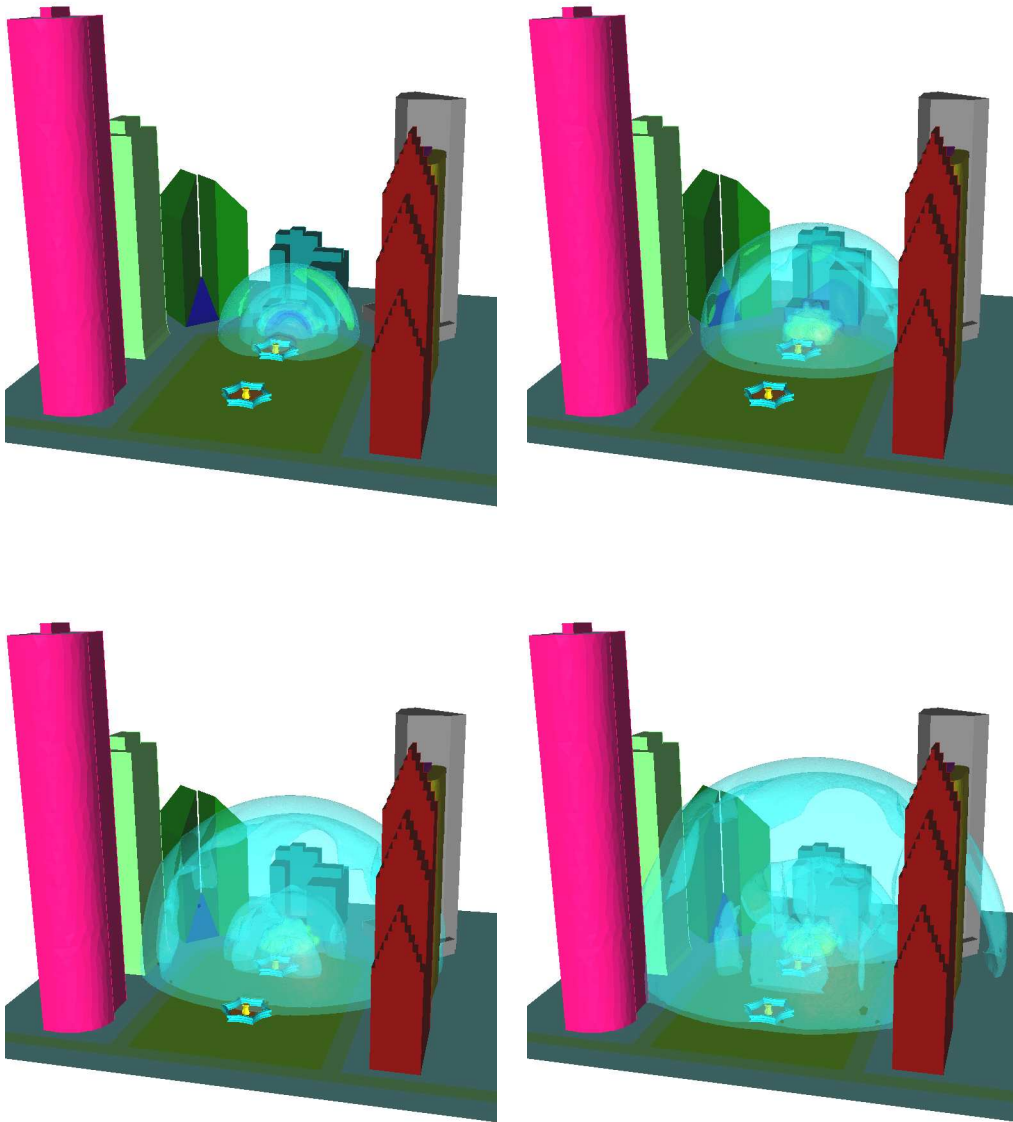


FIG. 18 – Évolution des iso-surfaces de densité dans le domaine de calcul aux temps 0.027, 0.05, 0.077 et 0.1 seconde (de gauche à droite et de haut en bas).

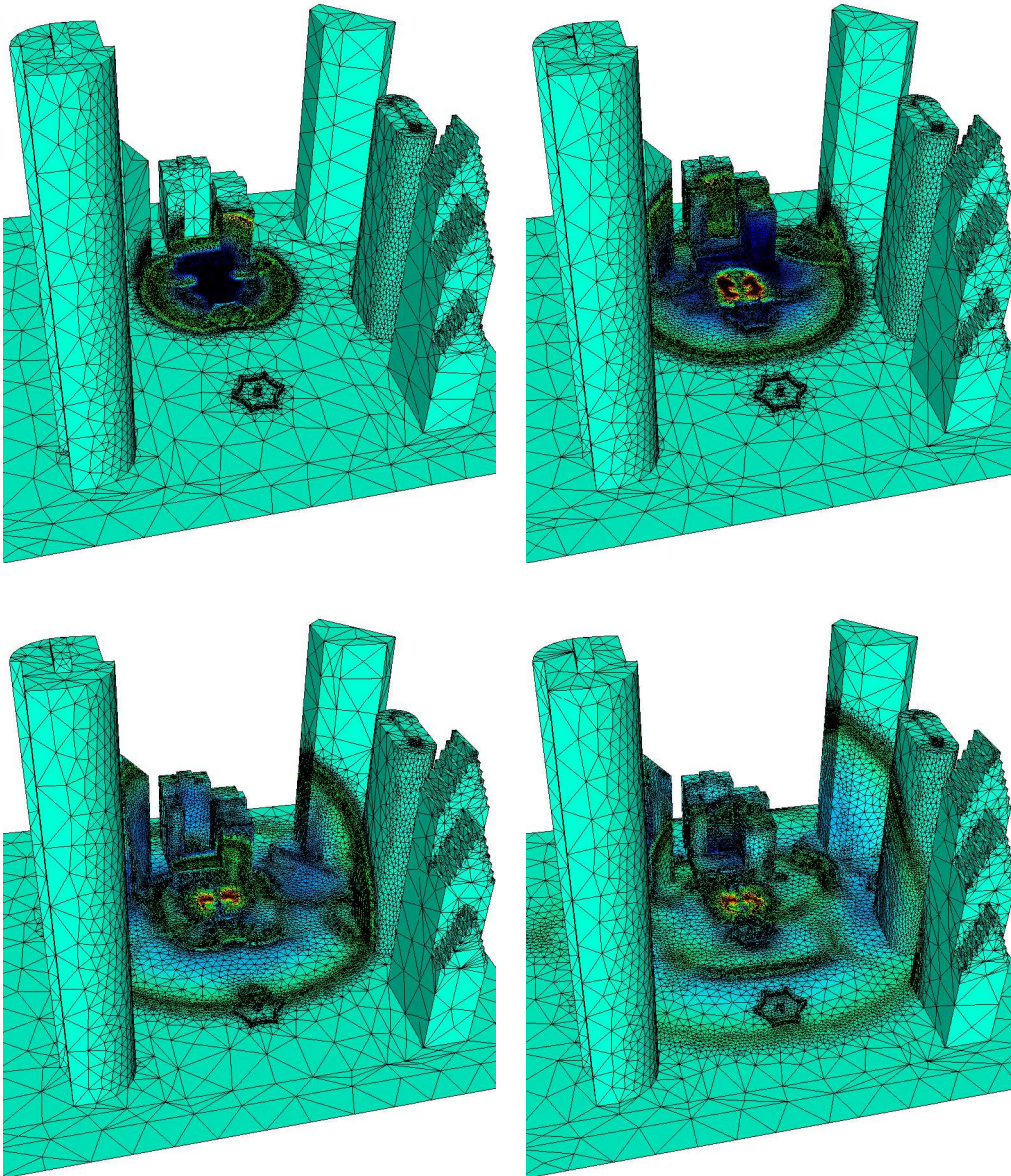


FIG. 19 – *Maillages isotropes adaptés de surface et distributions d'iso-densités correspondantes, aux temps 0.027, 0.05, 0.077 et 0.1 seconde.*

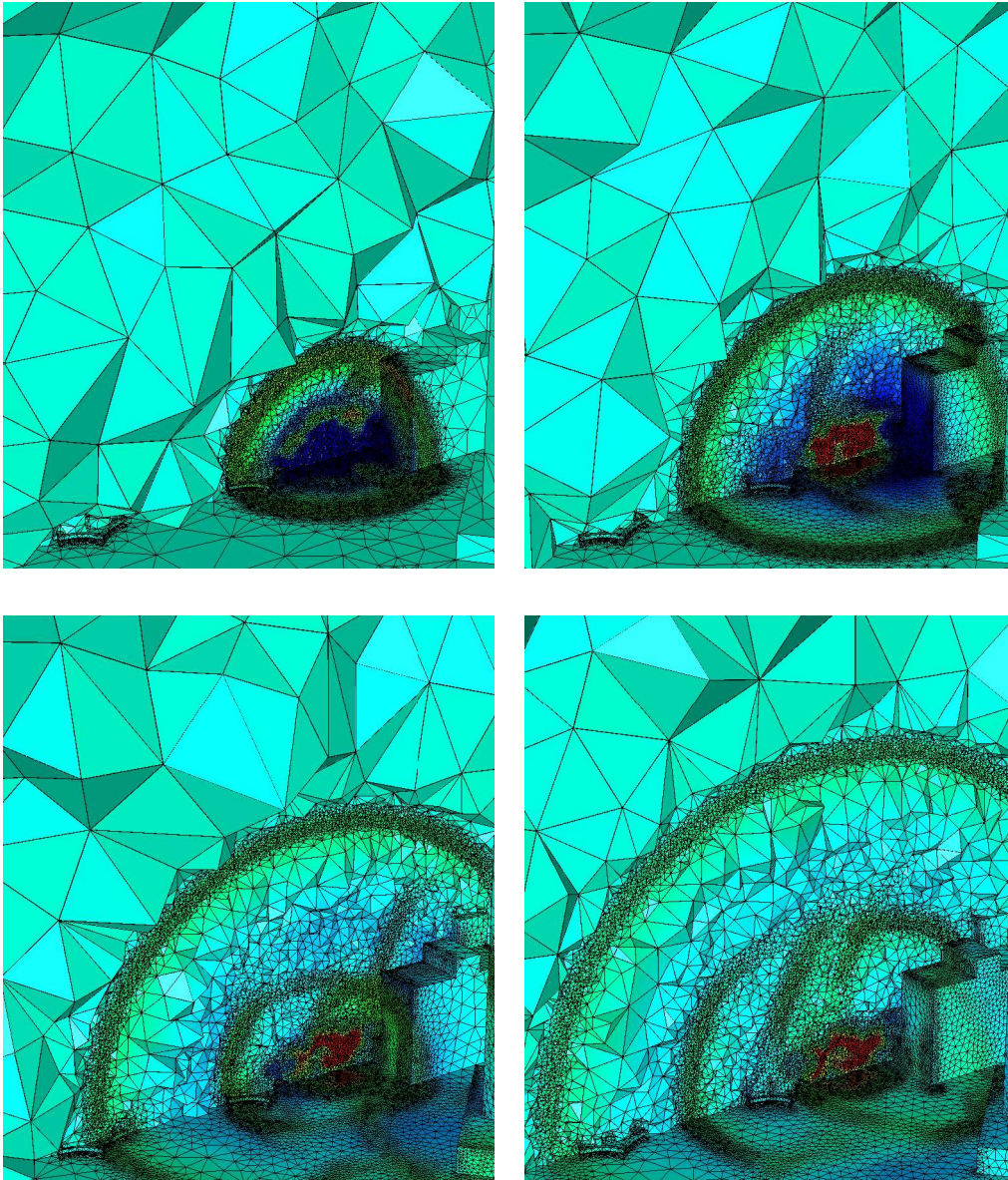


FIG. 20 – *Maillages isotropes adaptés de volume dans un plan de coupe et distributions d'iso-densités correspondantes aux temps 0.027, 0.05, 0.077 et 0.1 seconde.*

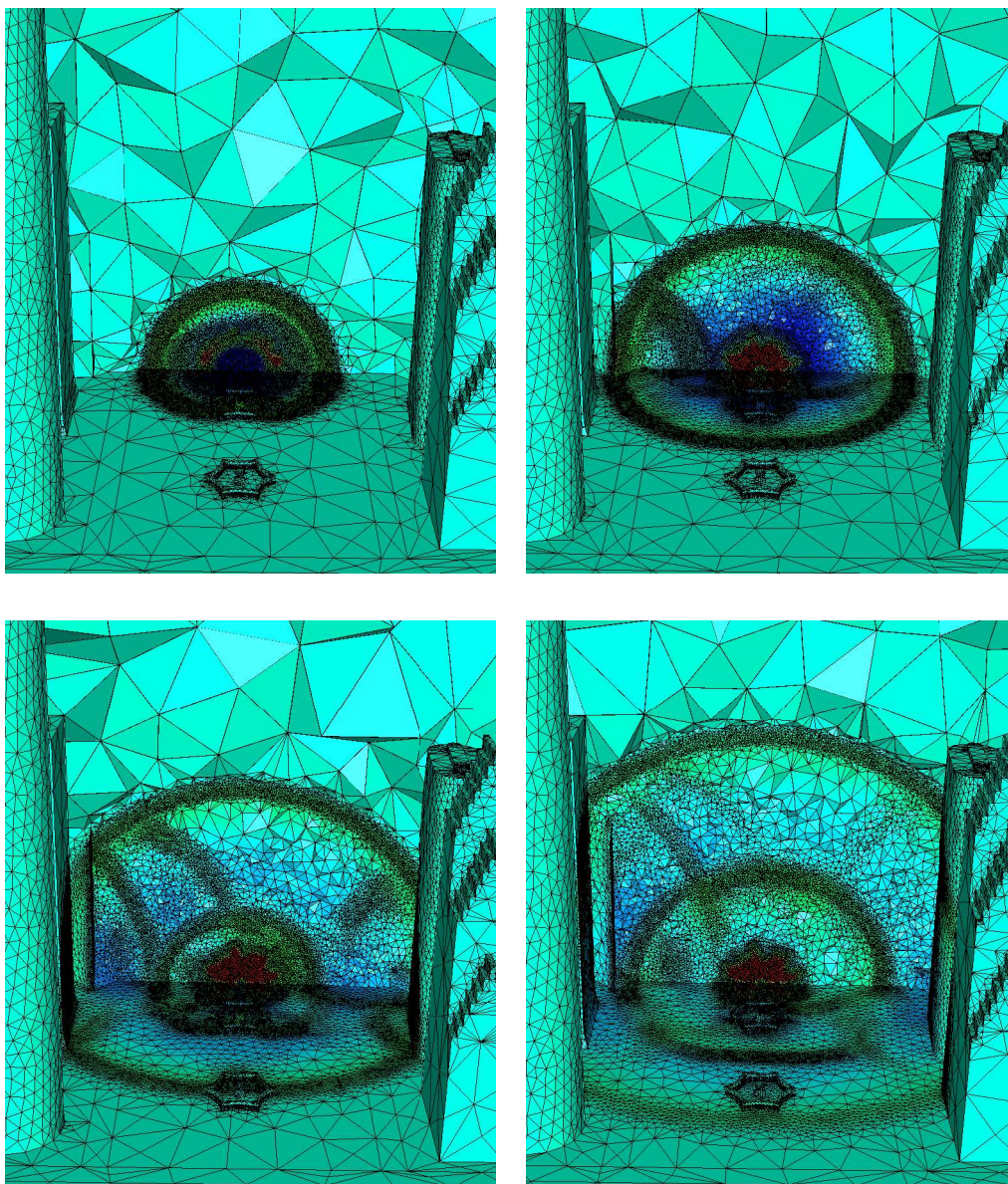


FIG. 21 – *Maillages isotropes adaptés de volume dans un plan de coupe et distributions d'iso-densités correspondantes aux temps 0.027, 0.05, 0.077 et 0.1 seconde.*

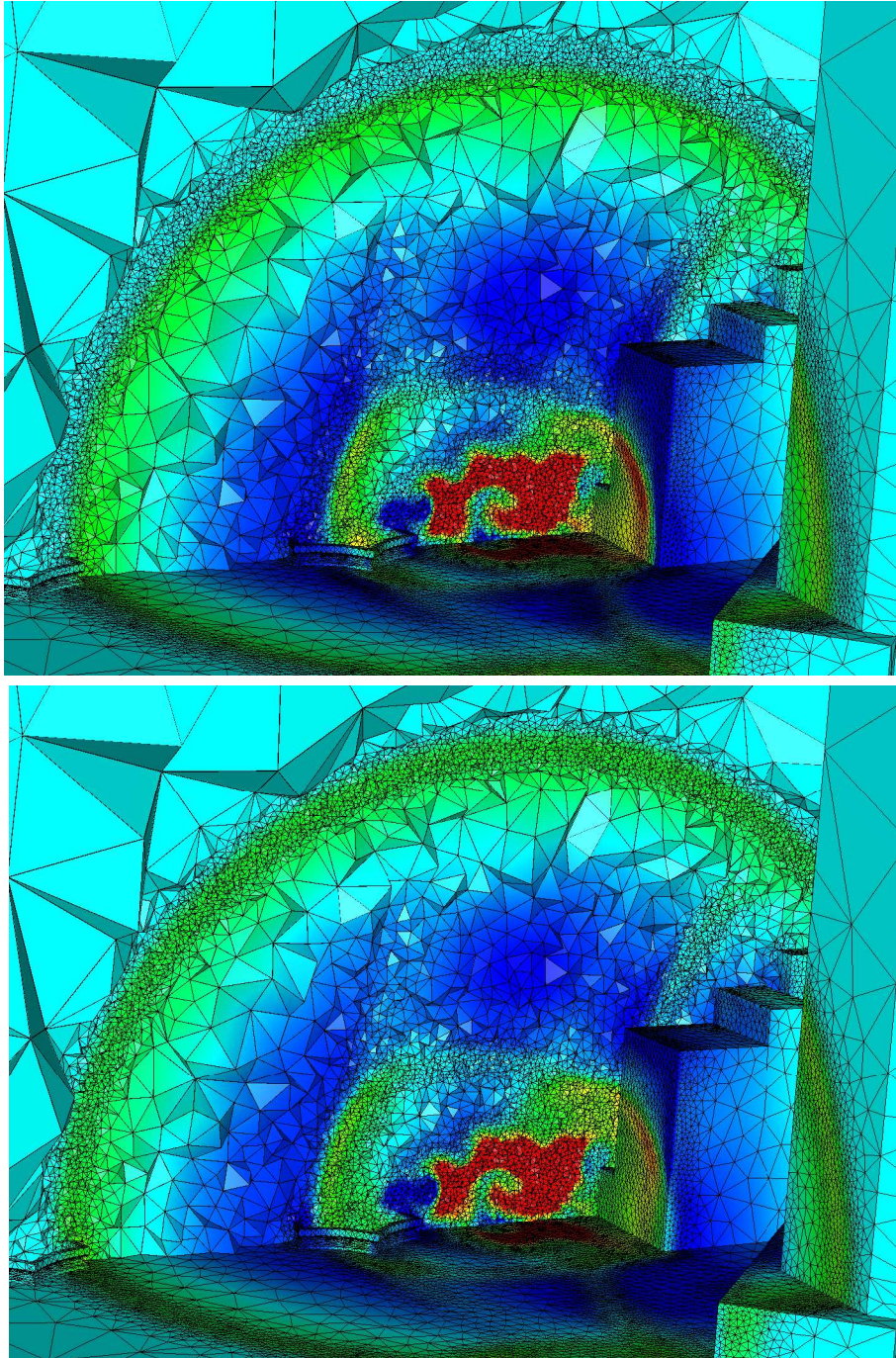


FIG. 22 — Illustration de l'impact de l'intersection de métriques en temps dans le volume et sur la surface. En haut, la solution au début de la période et, en bas, la solution à la fin de la période. Les ondes de chocs évoluent seulement dans les régions uniformément adaptées (c'est-à-dire où le maillage est dense).

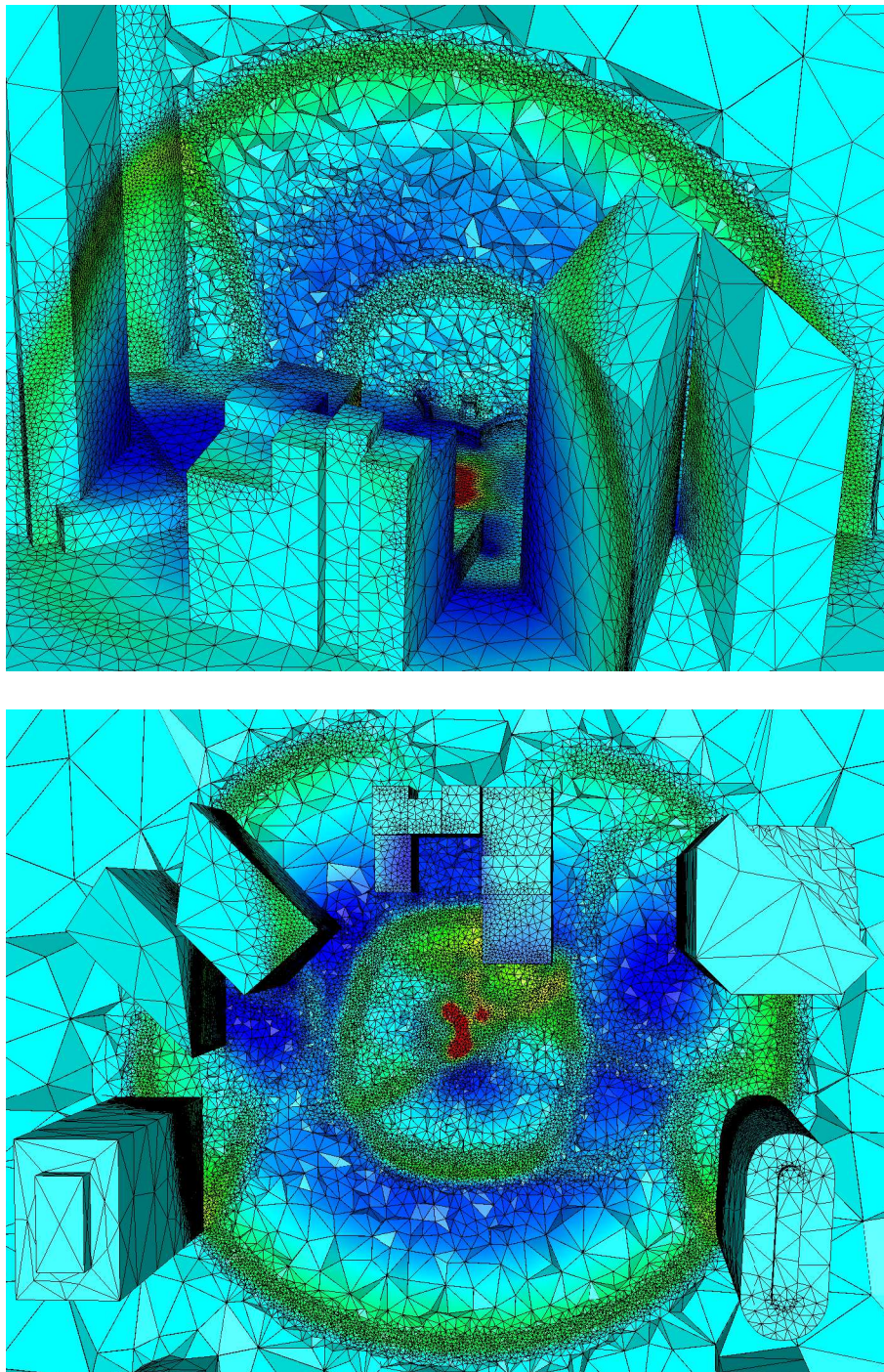


FIG. 23 – Différents plans de coupe dans le domaine de calcul au temps 0.077 seconde dans lesquels on a le maillage isotrope adapté de volume et les distributions d'isodensités correspondantes. En haut, un plan de coupe orthogonal au sol et, en bas, parallèle au sol (vue de dessus).

6 Conclusions et perspectives

Dans ce rapport, nous avons montré que l'approche classique d'adaptation de maillage est intrinsèquement inadaptée à l'étude de problèmes dépendant du temps dans le cadre du remaillage, à cause de l'erreur introduite par l'interpolation à chaque adaptation. Nous avons alors proposé une méthode d'adaptation de maillage basée sur un point fixe transitoire pour traiter les problèmes instationnaires dans le cadre du remaillage. Cette méthode utilise un schéma général d'adaptation de maillage pour les simulations instationnaires qui peut être vu comme une extension du schéma classique. Ce nouveau schéma permet de prédire l'évolution de la solution, non connue *a priori*, dans le domaine de calcul. Ensuite, une procédure d'intersection de métriques en temps est employée afin d'adapter le maillage dans les régions où la solution évolue. Avec l'intersection de métriques en temps, nous avons introduit de manière implicite le temps dans l'estimateur d'erreur, ce qui implique que l'erreur est contrôlée tout au long de la simulation. Cette nouvelle approche a donc permis (i) de préserver la précision de la solution tout au long de son évolution et (ii) de réduire le nombre d'adaptations dans le but de contrôler l'erreur sur les dérivées temporelles. Autrement dit, cette approche permet de contrôler l'intervalle de temps caractéristique du maillage.

Les résultats en dimension deux sur le problème modèle ont confirmé la validité et l'efficacité de cette approche, en termes de précision de la solution et de réduction de la complexité (gain de temps de calcul). Elle a été appliquée avec succès en dimension trois, dans le cadre isotrope, sur une géométrie complexe pour une simulation réelle, où la solution est non prédictible *a priori*.

Notons que l'ensemble des processus (génération des différents maillages et utilisation répétée du solveur) a été mené sur une "simple" station de travail en des temps qui restent raisonnables. Autrement dit, l'adaptation de maillage a permis d'effectuer cette simulation réaliste tridimensionnelle tout en évitant d'avoir recours à des moyens et des méthodes plus lourdes (comme le calcul parallèle).

Les résultats obtenus ont montré l'importance de l'étape d'interpolation pour les simulations instationnaires. Par conséquent, trouver un schéma d'interpolation qui permet un meilleur contrôle de l'erreur sur les dérivées temporelles de la solution permettrait d'effectuer un plus grand nombre d'adaptations de maillage et donc réduire la taille (le temps caractéristique) des maillages avec l'adaptation instationnaire.

En outre, nous avons mis en évidence qu'en dimension trois la majorité du temps de calcul (environ 95 % du temps de calcul total) était due au solveur numérique. Donc, pour réduire le coût de nos simulations, un effort est à produire au niveau du solveur numérique. Plusieurs approches sont possibles : solveur implicite en temps, un pas de temps local en instationnaire,...

La prochaine étape est l'application de ces techniques pour la génération de maillages anisotropes en dimension trois afin d'obtenir une solution encore plus précise et d'accroître la réduction de la complexité (en termes de degrés de liberté et de temps de calcul) par rapport à l'adaptation de maillage isotrope.

Références

- [1] F. ALAUZET ET P.J. FREY, Estimateur d'erreur géométrique et métrique anisotropes pour l'adaptation de maillage. Partie I : aspects théoriques, *Rapport de Recherche INRIA*, 4759, Mars 2003.
- [2] F. ALAUZET, P.J. FREY ET B. MOHAMMADI, Adaptation de maillages non structurés pour des problèmes instationnaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I 335, pp. 1-6, 2002.
- [3] F. ALAUZET *et al.*, Transient fixed point based unstructured mesh adaptation, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 43, n° 6-7, pp. 729-745, 2003.
- [4] J.D. BAUM, H. LUO AND R. LÖHNER, Numerical Simulation of Blast in the World Trade Center, *AIAA paper*, 95-0085, 1995.
- [5] H. BOROUCHAKI, D. CHAPELLE, P.L. GEORGE, P. LAUG ET P.J. FREY, Estimateurs d'erreur géométriques et adaptation de maillage, dans Maillage et adaptation, P.L. George ed., Série Mécanique et Ingénierie des Matériaux, Méthodes Numériques, *Hermès Science, Paris*, 2001.
- [6] M.J. CASTRO-DIAZ, F. HECHT, B. MOHAMMADI AND O. PIRONNEAU, Anisotropic Unstructured Mesh Adaptation for Flow Simulations, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 25, pp. 475-491, 1997.
- [7] P.J. FREY, *Yams*, A fully automatic adaptive isotropic surface remeshing procedure, *Rapport Technique INRIA*, RT-0252, Novembre 2001.
- [8] P.J. FREY, About surface remeshing, *Proc. of 9th Int. Meshing Roundtable*, New Orleans, LO, USA, pp. 123-136, 2000.
- [9] P.J. FREY, Contribution aux méthodes de construction, d'optimisation et d'adaptation des maillages de surfaces. Applications à la simulation numérique par des méthodes d'éléments ou de volumes finis, Thèse d'Habilitation à Diriger des Recherches de l'Université de Paris 6, 2002.
- [10] P.J. FREY ET P.L. GEORGE, Maillages : applications aux éléments finis, *Hermès Science, Paris*, 1999.
- [11] P.-L. GEORGE, Tet meshing: construction, optimization and adaptation, proceeding in *8th International Meshing Roundtable*, South Lake Tao, CA, USA, 1999.
- [12] P.L. GEORGE, *Gamhic3d*, A fully automatic adaptive mesh generation method in three dimensions, *Technical Note INRIA*, 2001.
- [13] P.-L. GEORGE, H. BOROUCHAKI AND P. LAUG, An efficient algorithm for 3D adaptive meshing, *Advances in Engineering Software*, Vol. 33, pp. 377-387, 2002.
- [14] F. HECHT AND B. MOHAMMADI, Mesh adaptation by metric control for multi-scale phenomena and turbulence, *AIAA paper*, 97-0859, 1997.
- [15] R. LÖHNER AND J.D. BAUM, Adaptive h-refinement on 3D unstructured grids for transient problems, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 14, pp. 1407-1419, 1992.
- [16] B. MOHAMMADI, Fluid dynamics computation with NSC2KE an user-guide Release 1.0, *Rapport Technique INRIA*, RT-0164, 1994.

-
- [17] B. MOHAMMADI AND F. HECHT, Mesh adaptation for time dependent simulation, optimization and control, *Revue Européenne des Éléments Finis*, Vol. 10, n°5, pp. 575-593, 2001.
 - [18] R.D. RAUSCH, J.T. BATINA AND H.T.Y. YANG, Spatial adaptation procedures on tetrahedral meshes for unsteady aerodynamic flow calculations, *AIAA Journal*, Vol. 30, pp. 1243-1251, 1992.
 - [19] P.A. DE SAMPAIO, P.R. LYRA, K. MORGAN AND N. WEATHERILL, Petrov-Galerkin solutions of the incompressible Navier-Stokes equations in primitive variables with adaptive remeshing, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, Vol. 106, pp. 143-178, 1993.
 - [20] G.A. SOD, A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws, *Journal Computational Physics*, Vol. 27, pp. 1-31, 1978.
 - [21] V. VENKATAKRISHNAN AND D.J. MAVRIPLIS, Implicit Method for the Computation of Unsteady Flows on Unstructured Grids, *ICASE Report*, No. 95-60 , 1995.
 - [22] J. WU, J.Z. ZHU, J. SZMELTER AND O.C. ZIENKIEWICZ, Error estimation and adaptivity in Navier-Stokes incompressible flows, *Computational Mechanics*, Vol. 6, pp. 259-270, 1990.



Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot-St-Martin (France)

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis : 2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399